# Chapitre 18

# Cadran Solaire

Un cadran solaire est un appareil rudimentaire qui permet de déterminer par simple lecture, en un lieu donné, le temps solaire vrai local c'est-à-dire tout simplement l'angle horaire du soleil. Nous allons décrire le principe de fonctionnement d'un cadran solaire méridional.

On rappelle que le plan méridien d'un lieu $O$ est déterminé par sa verticale la parallèle à l'axe des pôles, passant par $O$.

Sur un mur vertical bien lisse orienté plein sud, c'est-à-dire perpendiculaire au plan méridien d'un point $O$ de ce mur, on fixe parallèlement à l'axe des pôles, une tige rigide appelée style, l'ombre qu'elle porte sur le mur permet de déterminer l'angle horaire du soleil, c'est ce que l'on se propose de montrer dans l'exercice qui suit.

## 18.1 Les graduations du cadran

On suppose que l'on se trouve en un lieu de latitude $\phi = 51°$(Lille)

1°) Dessiner la sphère céleste de centre $O$ point d'attache du style en y représentant les éléments essentiels : le zénith $Z$ du lieu, le pôle céleste nord $P$, le cercle qui représente la trace du mur sur la sphère, et le cercle horaire du soleil à un instant donné. [1]

2°) On note $B$ l'intersection de ces 2 cercles (du côté de $Z$). Montrer que B est l'intersection avec la sphère céleste de la demi-droite opposée à celle définie par l'ombre du style sur le mur.

3°) On considère le triangle sphérique $PZB$, on appelle $x$ l'arc $ZB$, vérifier que l'angle des demi-plans $(OZ, OP)$ et $(OZ, OB)$ est droit et établir la liste des éléments connus de ce triangle.

[1] On se reportera ensuite à la Figure 18.1 pour la correction.

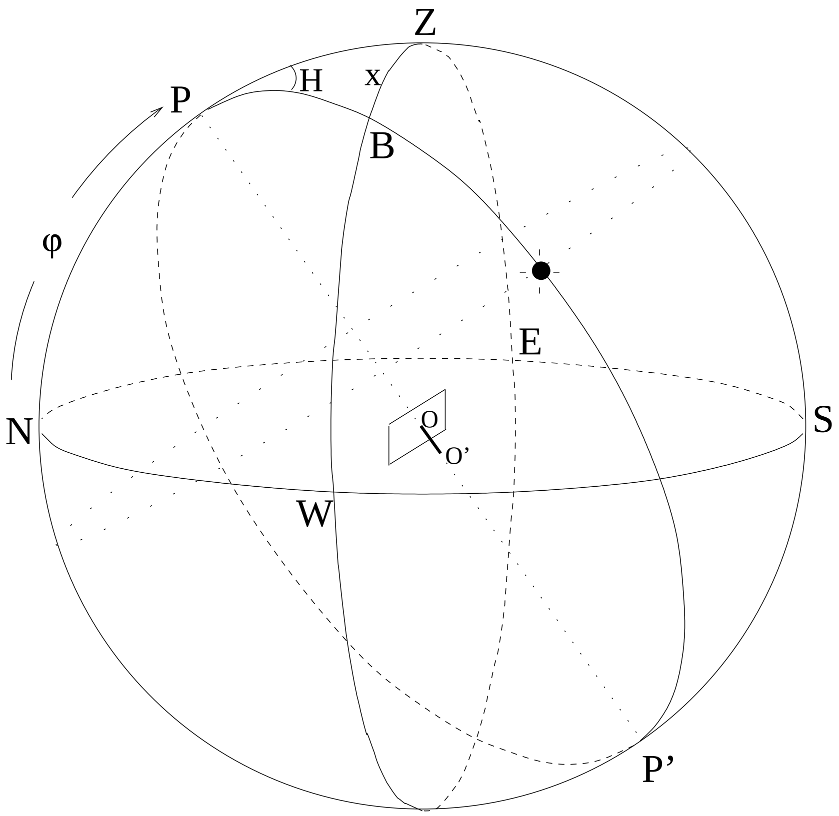


FIG. 18.1 – Le cadran solaire

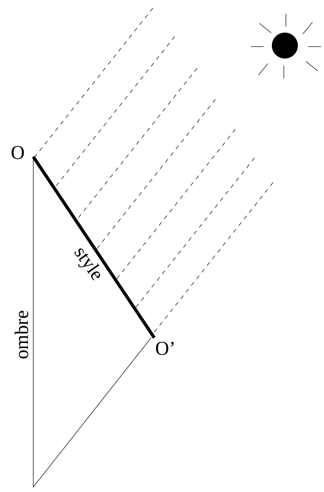


FIG. 18.2 – Le style et son ombre

On rappelle la formule des cotangentes dans un triangle sphérique d'éléments $(a, b, c, A, B, C)$

$$\sin b \cot a = \sin C \cot A + \cos b \cos C$$

En déduire la formule $\tan x = \tan H \cos \phi$

4°) Comment détermine-t-on $x$ à l'aide du cadran ?

5°) Dessiner les ombres portées d'heure en heure à partir de midi jusque $18h$ (pourquoi $18h$ ?)

## 18.2 Longueur de l'ombre

On se propose maintenant de décrire la courbe parcourue par l'ombre de l'extrémité $O'$ du style portée sur le mur.

1°) On peut considérer avec une très bonne approximation qu'au cours de son mouvement diurne le rayon joignant le soleil à $O'$ décrit un cône de révolution de sommet $O'$ et d'axe $OO'$, l'intersection de ce cône avec le plan du cadran est donc un arc de conique qui dégénère en une droite aux équinoxes, pourquoi ?

2°) à Lille c'est toujours un arc d'hyperbole, pourquoi ?

3°) Calculer la longueur des ombres portées par un style de longueur $1m$ aux solstices d'hiver et d'été à midi heure solaire vraie (à Lille toujours).

4°) Décrire pour les périodes d'automne et d'hiver la ligne des levers et couchers du soleil.

5°) Construire un cadran solaire à partir de toutes ces indications.

## 18.3 Construction des arcs d'hyperbole sur un cadran

On se propose de construire les deux arcs de l'hyperbole, correspondant aux ombres de l'extrémité du style, portées sur le cadran au cours des jours des solstices d'été et d'hiver. Pour des raisons de symétrie il est clair que l'axe principal de cette hyperbole est la verticale du plan du cadran passant par $O$, point d'attache du style.

Les sommets $A$ et $A'$ sur cet axe sont les ombres à midi solaire vrai. Connaissant la latitude du point $O$, on peut les construire.

On peut énoncer le théorème de Dandelin de la manière suivante :

L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan ne passant pas par son sommet est une conique dont l'excentricité $e$ est égale à $\dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}$, où $\theta$ est le demi-angle au sommet du cône (angle de son axe et d'une génératrice quelconque) et $\phi$ l'angle du plan et de l'axe.

La donnée des sommets $A$ et $A'$ de la conique, donc de son centre $\Omega$, et de l'excentricité $e = \dfrac{\Omega F}{\Omega A}$ nous permet de construire les foyers $F$ et $F'$ et finalement la conique point par point suivant la méthode classique.

Application : Construire les arcs correspondant aux solstices dans le cas où la latitude du lieu où est fixé le cadran est égale à $51^o$ (latitude de Lille).

Montrer que dans ce cas, quel que soit le jour de l'année l'arc est toujours un arc d'hyperbole.

Construire les arcs correspondant à une autre période de l'année, que vous choisirez.