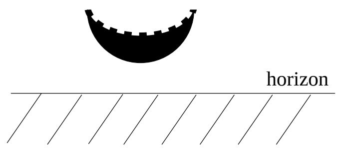
# Chapitre 21

# Croissant de Lune

On se propose d'établir les conditions pour que le croissant de Lune soit vu d'un lieu de la Terre comme « une gondole » :




## 21.1 Géométrie du croissant.

De manière intuitive et par la figure ci-dessus, on se rend compte que pour voir le croissant de Lune horizontal il est nécessaire et suffisant que le Soleil éclaire la Lune par « au-dessous », c'est à dire qu'ils aient le même azimut $A_L = A_\odot$.

Nous allons montrer cette affirmation.

On supposera pour simplifier le problème que le Soleil est à l'infini. La partie éclairée de la Lune est donc une demi-sphère limitée par le cercle $C_T$ appelé terminateur. Ce que voit en principe l'oeil de l'observateur est une calotte sphérique assez proche d'une demi-sphère elle aussi limitée par un cercle que l'on nomme $C_V$[1] . Mais il n'y a que la partie éclairée de cette demi-sphère qui est réellement vue, c'est-à-dire l'intersection des deux demi-sphères : un quartier d'orange.

Les bords de ce quartier sont deux demi-grands cercles (de $C_T$ et de $C_V$). Comme la projection d'un cercle sur un plan est une ellipse, la projection du

[1]Voir la fiche « Calotte sphérique / hémisphère »

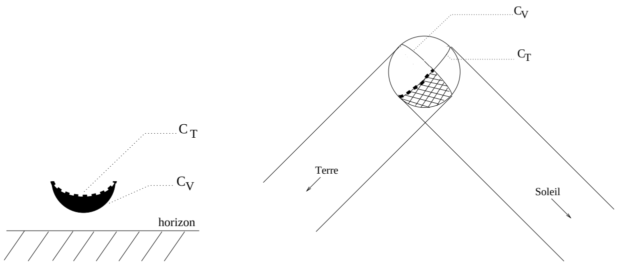


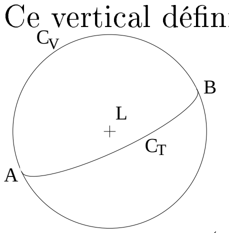

FIG. 21.1 – Les bords de la Lune.

terminateur $C_T$ sur le plan de visée[2] est vue comme une ellipse. Ainsi, voir la Lune comme une « gondole » revient à ce que le grand axe de cette ellipse soit horizontal.

**Question 1) A quelle condition le grand axe de cette ellipse est horizontal ?**

On rappelle que la verticale du lieu et la ligne de visée d'un astre définissent un plan appelé « plan vertical » ou « vertical ».

Ce vertical définit l'azimut de cet astre.




La démonstration est très simple si on considère une figure dans le plan de visée.
Soit $O$ l'observateur sur Terre et $S$ le Soleil.

Soit $V$ le plan (diamétral) contenant $C_V$, $V \perp (OL)$
Soit $T$ le plan (diamétral) contenant $C_T$, $T \perp (LS)$
Ainsi, $(AB) = V \cap T$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(AB) \subset V\\ (OL) \perp V\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp (OL)\\ \left.\begin{array}{l}(AB) \subset T\\ (LS) \perp T\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp (LS)\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp \text{plan } (OLS)$$

Ceci n'est possible que si $O$, $L$ et $S$ ne sont pas alignés (c'est à dire en dehors des éclipses).

Puisque la condition est que $(AB)$ soit horizontal alors $(OLS)$ est un vertical, c'est-à-dire que $L$ et $S$ sont dans le même vertical. On peut donc conclure que $L$ et $S$ ont le même azimut.

[2]La ligne de visée est la demi-droite qui joint l'oeil de l'observateur au centre de la Lune. Tout plan perpendiculaire à la ligne de visée est appelé plan de visée. Par exemple, pour un appareil photo, la ligne de visée est l'axe de l'objectif et un plan de visée est celui de la pellicule.

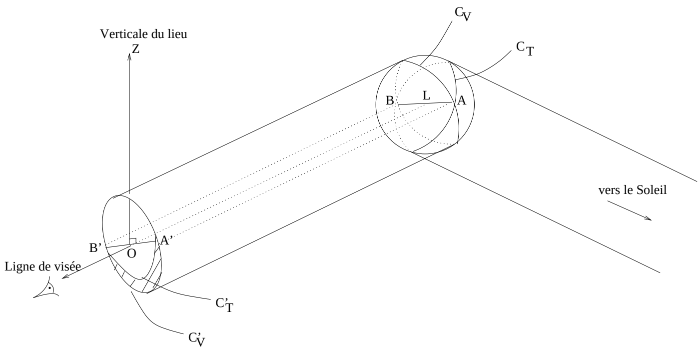



FIG. 21.2 – Les différents plans de visée.

**Ainsi, le Soleil et la Lune ont le même azimut (ou sont différents de** $180°$**).**

Nous donnons ci-dessous, une présentation de la démonstration légèrement différente qui utilise l'image du croissant qui se forme au niveau de l'observateur. De ce fait, la démonstration est plus lourde et peut apparaître plus confuse. Son intérêt est surtout de bien montrer qu'il n'y a pas de différence à utiliser l'image de l'objet (plan de visée au niveau dela rétine de l'oeil ou au niveau de la plaque photographique) que l'objet lui-même.

Cette démonstration peut être omise, au moins en première lecture.

Les notations sont celles de la Figure (21.2) .

$(A'B')$ est la direction horizontale du plan de visée. En tant qu'horizontale, $(A'B')$ est perpendiculaire à la verticale du lieu $(OZ)$. En tant que droite appartenant au plan de visée, $(A'B')$ est perpendiculaire à la ligne de visée $(OL)$.

Comme $(A'B')//(AB)$ et $(AB) \perp (LS)$ donc $(A'B')$ est aussi perpendiculaire à $(LS)$.

On en déduit que $(A'B')$ est perpendiculaire au plan $(OLS)$, c'est à dire que $(OZ) \subset (OLS)$. Ce qui signifie que $(OLS)$ est un vertical.

## 21.2 Conditions de visibilité

**Question 2) Préciser les conditions sur les hauteurs du Soleil et de la Lune pour que le croissant de Lune soit vu comme une « gondole » et non comme un 'D' renversé ?**

Tout d'abord, il est préférable que le Soleil soit couché et donc sa hauteur doit être négative. La Lune, quant à elle, doit être levée : sa hauteur est donc positive (Figure 21.3).

Soit $h_L$ la hauteur de la Lune et $h_\odot$ la hauteur du Soleil.

Si $h_\odot = h_L - 90°(< 0)$ l'observateur voit exactement une demi-lune. Ainsi pour avoir l'aspect indiqué sur la figure (un croissant comme une « gondole »),

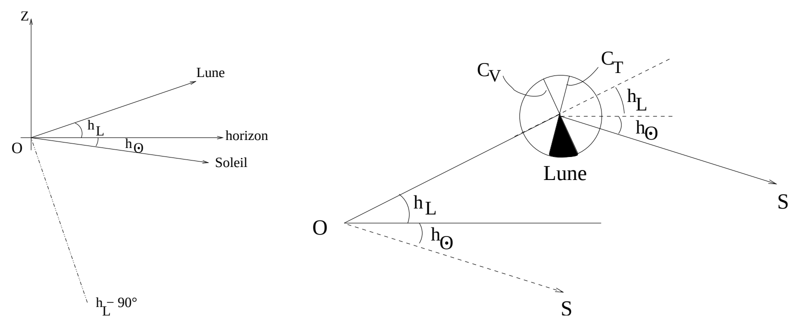



FIG. 21.3 – Conditions de visibilité.

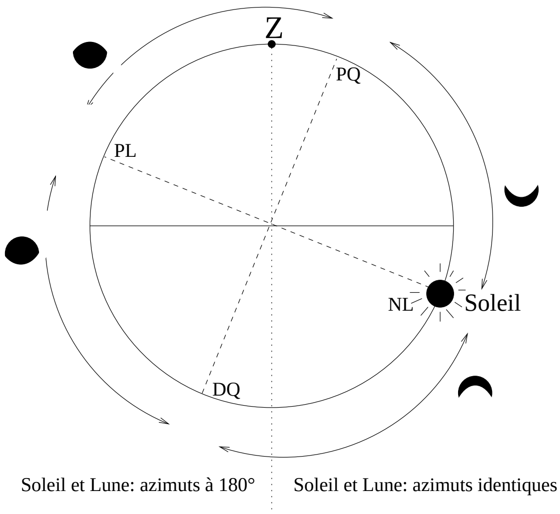



FIG. 21.4 – Phases de la Lune sous la condition de même azimut. Figure dans le plan vertical de la Lune (et du Soleil).

il est nécessaire d'avoir $h_\odot > h_L - 90°$.

La Figure (21.4) donne, pour chaque position de la Lune sur le même vertical que le Soleil, l'aspect de celle-ci.

La position du zénith sur le cercle est indicatif. Elle correspond au cas de la Figure (21.3). Bien-sur, si le zénith est ailleurs sur le cercle, cela change les conditions de lever/coucher du Soleil et de la Lune.

## 21.3 Condition d'existence : cas coplanaire

**Question 3) En supposant que la Lune est sur l'écliptique, donner les seuls endroits de la Terre où il est possible de voir le croissant de Lune horizontal**

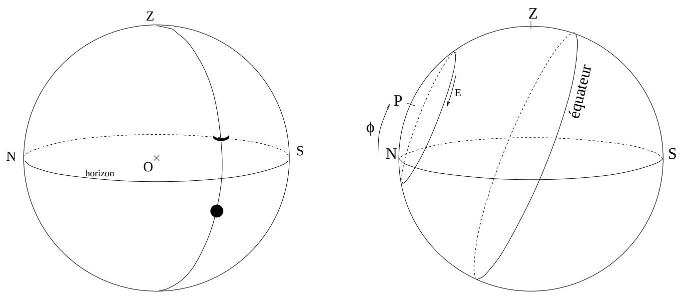



FIG. 21.5 – Cas de la Lune sur l'écliptique.

On sait qu'il n'y a qu'un seul grand cercle passant par deux points de la sphère céleste. Or, la Lune et le Soleil sont sur un même grand cercle (écliptique), et puisque $A_L = A_\odot$, les grands cercles $ZL$ et $Z\odot$ sont les mêmes. Ainsi le zénith $Z$ est sur l'écliptique. Or,

$$\text{« } Z \text{ est sur l'écliptique »} \equiv \text{« } ZE = 90° \text{ »} \equiv \text{« } E \text{ est sur l'horizon »}$$

où $E$ est le pôle de l'écliptique. $E$ est un point de la sphère des fixes. A ce titre, et comme toutes les étoiles, il est affecté par le mouvement diurne. $E$ tourne autour du pôle céleste nord $P$ à la distance angulaire $\omega = 23°26'$ (**obliquité**) .

On voit que pour une latitude comme celle de Lille ($\varphi = 50°$), cela est impossible. Ce n'est possible que si

$$|\varphi| \leq 23°26'$$

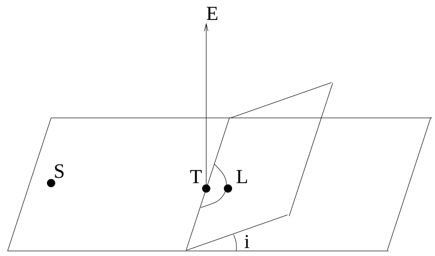
c'est à dire, entre les tropiques. En ces lieux, la condition est réalisée 2 fois par jour[3].

## 21.4 Condition d'existence : cas non coplanaire

**Question 4) On considère dans cette question que l'orbite de la Lune autour de la Terre est écartée de l'écliptique d'une valeur $i$ non nulle ($i \approx 5°$). Chercher alors une autre condition pour que la Lune et le Soleil aient le même azimut.**

Une condition suffisante est donnée par la figure suivante :

[3]Il reste alors à regarder les conditions de lever et de coucher. Par exemple : à l'heure où $E$ est sur l'horizon (2 cas), on trace l'écliptique sur la Figure (21.5) (elle passe par le zénith). Les conditions de lever/coucher du Soleil dépendent de la date. Les conditions de lever/coucher de la Lune dépendent dépendent aussi de la date mais dans la lunaison selon la Figure (21.4)




C'est à dire le plan $(STL)$ est perpendiculaire à l'écliptique. Cette condition est indépendante du lieu.

*$(STL)$ définit un plan. Ce plan coupe la Terre suivant un grand cercle. Or, durant la lunaison, ce plan tourne complètement. Ainsi tous les lieux de la Terre sont concernés.*

*2 fois par mois*

En fait cette situation correspond à une pleine Lune (ou une nouvelle Lune si celle-ci était de l'autre coté). Le « croissant » de Lune est bien horizontal mais cela n'est guère perceptible à l'oeil. D'ailleurs si $i = 0$, ce serait une situation d'éclipse (la Lune dans l'écliptique). Donc une situation de pleine Lune stricte n'existe pas.

## 21.5 Le zénith sur la sphère des fixes

Il est peut-être plus facile de voir les 2 cas (coplanaire et non-coplanaire) en raisonnant sur la sphère des fixes. Pour la Figure (21.5), on regardait le mouvement diurne d'un point de la sphère des fixes (le pôle $E$ de l'écliptique) sur la sphère locale (de pôle $Z$). Dans cette section, nous allons faire la démarche réciproque : on regarde le mouvement diurne de $Z$ sur la sphère des fixes. On utilise la condition suivante :

$$L \in \quad \text{grand cercle} \quad (ZS) \quad \text{(vertical du Soleil)}$$

En effet, nous avons vu que c'est la condition pour voir la Lune comme une « gondole » (ou tout au moins, la Lune à l'horizontal).

**Figure (21.6) :**

Sur une sphère des fixes où on a placé l'équateur, l'écliptique et leurs pôles, et pour une latitude $\varphi$ donnée, on trace le petit cercle correspondant aux positions prises par le zénith au cours du mouvement diurne (« petit cercle des $Z$ »). On positionne aussi (à une date donnée) le Soleil sur l'écliptique. A

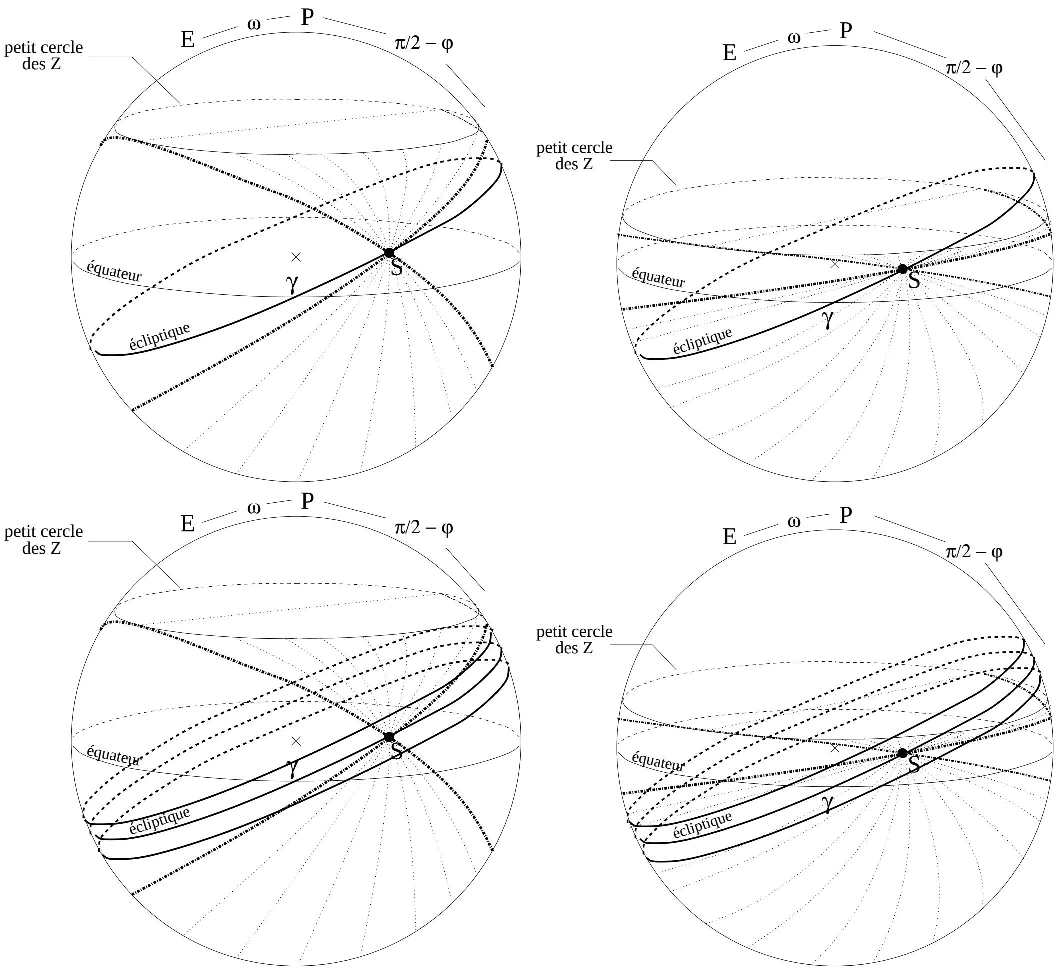



FIG. 21.6 – Petit cercle des zéniths sur la sphère des fixes durant le mouvement diurne. Cas d'une zone tempérée (à gauche) et d'une zone intertropicale (à droite). Cas de la Lune sur l'écliptique (en haut) et cas de la Lune de part et d'autre de l'écliptique à 5° au plus (en bas)

chacune de ces positions de $Z$, il correspond un seul grand cercle passant par le Soleil : c'est le vertical du Soleil. On obtient ainsi un faisceau de grands cercles dont les sommets sont le Soleil et le point diamétralement opposé. Sur la Figure (21.6), pour ne pas encombrer celle-ci, nous en avons tracé qu'une partie puisque qu'on les a arrétés au niveau du petit cercle des $Z$. En réalité, ces grands cercles sont bien complets de sorte que toute la calotte sphérique se situant au dessus[4] du petit cercle des $Z$ est parcouru par ces grands cercles. Ainsi la sphère est divisée en deux parties : celle contenant chaque vertical du Soleil et l'autre.

La Lune doit se trouver dans la première partie (les « faisceaux » de la Figure (21.6)).

La frontière entre ces deux parties correspond au vertical du Soleil qui est tangent au petit cercle des $Z$.

### Cas de la Lune sur l'écliptique

Ce cas correspond aux 2 dessins du haut de la Figure (21.6). En dehors de la zone intertropicale (à gauche), l'écliptique coupe « les faisceaux » qu'en ses sommets : au Soleil et au point diamétralement opposé. Si on impose à la Lune d'être sur l'écliptique, il n'y a qu'en ses points que la condition est réalisée (éclipses). Par contre, dans la zone intertropicale, tout l'écliptique est contenu dans « les faisceaux ». Ainsi la condition est réalisée deux fois par jour comme on l'a vu dans précédemment.

### Cas où la Lune est de part et d'autre de l'écliptique

L'orbite de la Lune est inclinée d'environ 5° sur l'écliptique. Son noeud qui permettrait de positionner le grand cercle correspondant à son orbite, a un mouvement de rétrograde de $-19°,34$/an (période : 18,6 ans). Pour ne pas rentrer dans trop de détails superflus à la compréhension, nous allons simplement considérer que la Lune est de part et d'autre de l'écliptique sur une bande large de 10°. Bien-sur, il ne faut pas oublier que la Lune parcourt en fait un grand cercle contenu dans cette bande : la position en longitude dans cette bande dépend de la date dans la lunaison et la position « verticale » dans cette bande dépend de la position du noeud de l'orbite lunaire.

On remarque ainsi qu'au voisinage de la pleine Lune ou au voisinage de la nouvelle Lune, la condition de « Lune horizontale » est possible partout sur la Terre (comme cela a été vu en Sect. (21.4)). Mais on se rend bien compte

[4]Ou au-dessous, pour une figure faite avec le Soleil au dessus du cercle des $Z$ (cas intertropical seulement)

que la zone est étroite. Elle s'agrandit au fur et à mesure que le lieu considéré s'approche du tropique.

Dans le cas d'un lieu dans la zone intertropicale, la possibilité d'une telle condition est grande. La probabilité de réalisation l'est donc aussi. Cependant cette probabilité n'est pas 1, car on voit apparaitre une petite zone de la bande lunaire qui croise la partie où il n'y a pas de vertical du Soleil (en dehors des « faisceaux »). Cette zone est petite et proche du Soleil. Ainsi même dans la zone intertropicale, il peut y avoir des jours où la Lune n'est pas vue à l'horizontal. Cela se produit pour des positions particulières de l'orbite lunaire et pour des dates proches de la pleine Lune ou de la nouvelle Lune.

## 21.6 Extensions possibles

- Déplacer le Soleil sur l'écliptique. Cela revient à considérer d'autres dates. Celle de la Figure (21.6) correspond au milieu du printemps.
- Regarder ce qui se passe lorsque le Soleil est sur le petit cercle des $Z$. Cela n'est possible que dans la zone intertropicale.
- Regarder ce qui se passe lorsqu'on est sur l'équateur terrestre.
- Se placer dans l'hémisphère australe ($\varphi < 0$).
- Pour une époque donnée, donc pour une longitude du noeud de l'orbite lunaire donnée, placer le grand cercle de l'orbite de la Lune.
- Sur la Figure (21.5), on suppose que la Lune est sur * l'écliptique. Or l'écliptique est utile dans le raisonnement pour la seule raison que c'est un grand cercle. Considérer $F$ le pôle du grand cercle ($LS$) (qui n'est plus obligatoirement l'écliptique) et refaire la Figure (21.5) avec $F$ au lieu de $E$.
- Comment évolue $F$ suivant la lunaison, la date ....
- Etudier l'ouverture du faisceau de vertical. Il s'agit donc de positionner exactement le vertical tangent. Etudier sa dépendance par rapport aux angles utilisés ($\omega$, $\varphi$, $l_\odot$, ...).
- Etude de l'occurence du phénomène et l'analogie avec les éclipses.
- ...