Chapitre 10

Résolutions de triangles

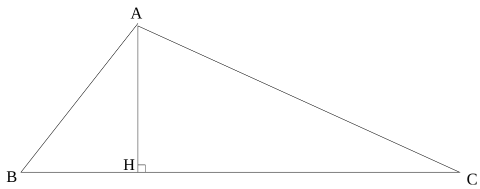
Un triangle posséde 6 éléments : ce sont les 3 angles et les 3 longueurs des côtés. La donnée de 3 seulement de ces éléments suffit à déterminer le triangle sauf si ce sont les 3 angles (trois longueurs ou un angle, deux longueurs ou deux angles, une longueur). Les autres angles et les autres longueurs de ce triangle sont alors déterminés.

Nous allons établir un certain nombre des formules correspondantes.

Ce procédé, appelé résolution d'un triangle, est très utile en astronomie, puisque l'on cherchera notamment à déterminer des distances entre des astres à partir de mesures d'angles, plus aisées à effectuer sur Terre.

A. Formule des sinus.

Considérons un triangle ABC. Nous allons démontrer la propriété suivante dite formule des sinus : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$



Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Prouver que :

$$AH = AB \sin \hat{B}$$

2. Prouver que :

$$AH = AC \sin \hat{C}$$

3. Déduire des questions 1. et 2. que :

$$\frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$$

4. Achever la démonstration.

B. Formule d'Al Kashi.

Nous allons prouver que pour tout triangle ABC :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\,AB\,AC\,\cos\widehat{A}$$

Ceci constitue une généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque, connue sous le nom de formule d'Al Kashi.

$1^{\text{ère}}$ démonstration : à l'aide du théorème de Pythagore.

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de B.

1. On suppose dans un premier temps que H appartient à $[AB]$. Prouver que : $AC^2 = AH^2 + CH^2 + 2\,AH\,CH$
2. Prouver que : $AB^2 = AH^2 + BH^2$.
3. Déduire de 1 et 2 que : $AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2\,AH^2 + 2\,AH\,CH$
4. En déduire que : $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\,AH\,AC$
5. Conclure, puis refaire la démonstration dans le cas où H n'appartient pas à $[AB]$.

$2^{\text{ème}}$ démonstration : à l'aide du produit scalaire.

En appliquant la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{BC}$, développer son carré scalaire et retrouver la formule.