Table des matières

Première partie

Distances dans le système solaire : applications pour le collège

Chapitre 1

Rayon de la Terre

1.1 Méthode d'Eratosthène.

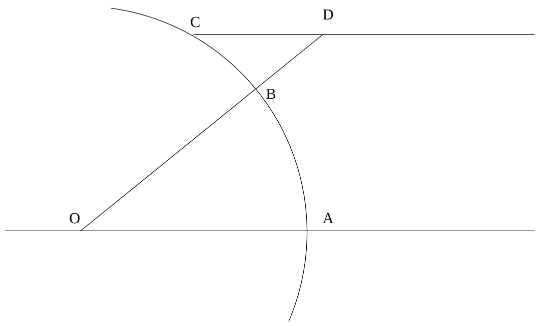
Etant donné un cercle de centre O de rayon R, deux point A et B de ce cercle, on connait la relation liant le rayon du cercle, la longueur l de l'arc AB, et la mesure en radians de l'angle α qui intercepte cet arc :

$$l = R\alpha$$

Si on admet que la Terre est ronde, on pourra connaitre le rayon de la Terre avec la donnée de deux points A et B sur un même méridien et de l'angle $\widehat{AOB}$, O étant le centre de la Terre. On peut mesurer la longueur de l'arc de méridien AB, cela peut être long mais en principe réalisable. Mais comment mesurer l'angle $\widehat{AOB}$? En A, on connait la direction OA, c'est la verticale en A donnée par le fil à plomb. De même, en B on connait la direction verticale OB. Mais comment connaitre la direction OB lorsqu'on est en A (et réciproquement). Pour cela, on va se servir d'un élément extérieur à la Terre, en l'occurence le Soleil.

Voici la méthode utilisée par le savant grec **Eratosthène** pour déterminer le rayon de la Terre.

- Un jour dans l'année il remarque que le soleil éclaire le fond des puits dans la ville égyptienne de Syène (A sur la figure). Cela signifie que ses rayons lumineux passent par le centre de la Terre (O sur la figure).



- Le même jour à Alexandrie, située à 800 km, une tour ([BD] sur la figure) de 25 m projette une ombre de 3,1 m (l'arc BC sur le dessin)

1. En assimilant l'arc BC à un segment de droite et le triangle BCD à un triangle rectangle en B calculer un arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{D}$.
2. En considérant que les rayons solaires sont parallèles[1], déterminer un arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle $\widehat{O}$.
3. En déduire une valeur approchée du rayon de la Terre.

1.2 Méthode d'Eratosthène adaptée.

La méthode d'Eratosthène nécessite de connaitre un point du globe où les rayons solaires frappent à la verticale, ce qui n'est pas possible pour un européen.

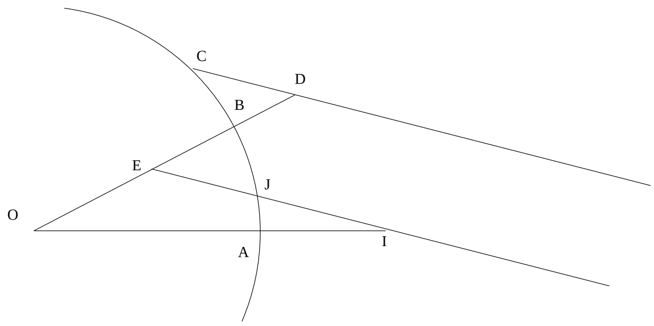
Voici une adaptation de la méthode d'Eratosthène qui permet de se passer de la condition de verticalité des rayons solaires.

Soit B un collège situé à Lille et A un collège situé à Montpellier. On considèrera qu'ils se trouvent sur un même méridien et qu'ils sont distants de 800 km.

On dresse verticalement un piquet BD et un piquet AI dont on connait les longueurs.

On mesure à la culmination les ombres portées BC et AJ que l'on assimilera à des segments de droite.

1. On suppose que le Soleil est suffisamment éloigné de la Terre pour admettre le parallélisme des rayons. Le modèle utilisé ici est donc une Terre ronde et un Soleil à "l'infini". On pourrait utiliser un autre modèle comme une Terre plate et donc un Soleil "plus proche".



1 - Prouver que les droites (IJ) et (OB) se coupent en un point E.

2 -

a. Exprimer l'angle $\widehat{EOI}$ en fonction des angles $\widehat{EIO}$ et $\widehat{OEI}$.

b. Prouver que les angles $\widehat{OEI}$ et $\widehat{BDC}$ sont supplémentaires.

c. Déduire de a. et de b. que : $\widehat{BOI} = \widehat{BDC} - \widehat{EIO}$.

3 - Exprimer les angles $\widehat{BDC}$, $\widehat{JIA}$ puis $\widehat{BOI}$ en fonction des longueurs BD, BC, AI, AJ.

Connaissant l'angle $\widehat{BOI}$, on détermine de la même façon que dans la méthode d'Eratosthène le rayon de la Terre.

Chapitre 2

Triangulation

La triangulation est une méthode élaborée afin de pouvoir calculer des mesures de grandes longueurs en ne mesurant que des petites longueurs et des angles.

Elle repose sur le fait que les mesures des angles d'un triangle ainsi que des longueurs de ses côtés et de ses hauteurs sont entièrement calculables à partir de la donnée des mesures de deux de ses angles et de la longueur d'un de ses côtés.

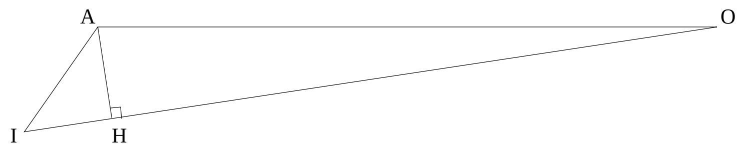
2.1 mesure de la longueur du collège.

Afin de mesurer la longueur AO du collège plaçons notre goniomètre [1] en un point I de la cour de telle façon que la longueur AI soit aisément mesurable à l'aide d'un mètre et que l'angle $\widehat{A}$ soit supérieur à un angle droit.

Mesurons la longueur AI et l'angle $\widehat{I}$ à l'aide de notre goniomètre.

Plaçons un piquet vertical nous servant de repère en I et mesurons ensuite l'angle $\widehat{A}$ (du triangle AOI) à l'aide de notre goniomètre.

Vue de dessus :



Calcul de la mesure de la longueur AO.

1. Le goniomètre est un instrument de précision servant à mesurer les angles.

Nous connaissons la longueur AI et les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{I}$, nous devons donc exprimer la longueur AO en fonction de ces données.

Appelons H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle AOI. Comme l'angle $\widehat{A}$ est supérieur à un angle droit, le point H se trouve sur le segment $[OI]$.

1. Vérifier que : $AH = AO \times \sin \widehat{O}$

2. Vérifier que : $AH = AI \times \sin \widehat{I}$

3. En déduire que :

$$AO = AI \times \frac{\sin \widehat{I}}{\sin \hat{O}}$$

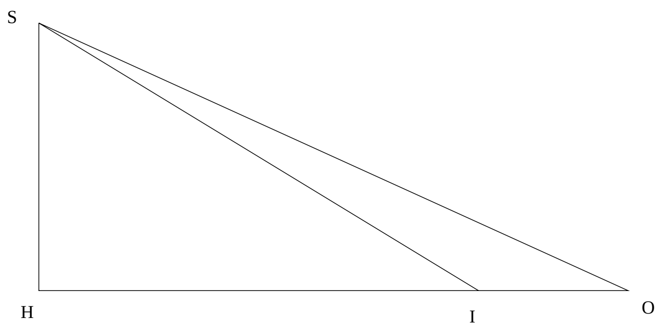
2.2 mesure de la hauteur du collège.

Afin de mesurer la hauteur SH du collège plaçons notre goniomètre en un point II de la cour et mesurons l'angle $\widehat{HIS}$ (noté $\widehat{I}$ dans la suite).

Plaçons ensuite notre goniomètre en un point O plus éloigné du mur de telle façon que la longueur OI soit aisément mesurable à l'aide d'un mètre.

Mesurons la longueur OI et l'angle $\widehat{O}$ à l'aide de notre goniomètre.

Vue de côté :



Calcul de la mesure de la longueur SH.

Nous connaissons la longueur OI et les angles $\widehat{O}$ et $\widehat{I}$, nous devons donc exprimer la longueur SH en fonction de ces données.

1. Vérifier que $SH = OH \times \tan \widehat{O}$ et que $SH = IH \times \tan \widehat{I}$
2. En utilisant l'égalité $OH = OI + IH$, en déduire que

$$IH = OI \times \frac{\tan \widehat{O}}{\tan \widehat{I} - \tan \widehat{O}}$$

et que

$$SH = OI \times \frac{\tan \widehat{I} \times \tan \widehat{O}}{\tan \widehat{I} - \tan \widehat{O}}$$

Remarque : à l'aide de cette méthode nous avons en fait calculé la hauteur du collège moins la hauteur du goniomètre.

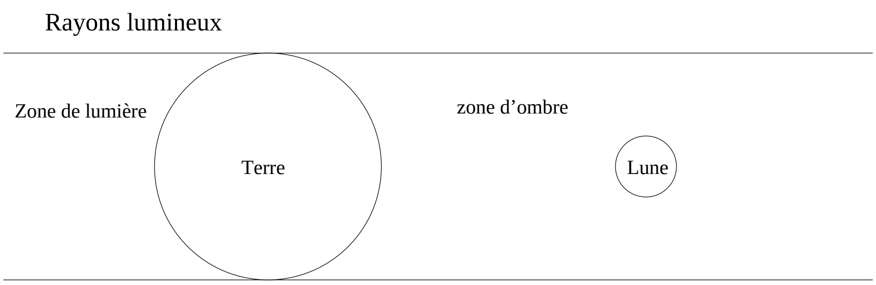
Chapitre 3

Diamètre de la Lune par Aristarque

Voici une méthode utilisée par le savant grec **Aristarque de Samos** (≈300 av. J.C.) pour évaluer le diamètre de la Lune.

Nous supposerons que les rayons du Soleil sont des droites parallèles.

Sur la figure suivante nous avons représenté une situation d'éclipse de Lune.



On sait grâce à l'observation que :

– Le temps pendant lequel la Lune est entièrement dans la zone d'ombre est au maximum de deux heures.
– Chaque heure la Lune avance d'une distance égale à son diamètre.

1. Refaire le dessin ci-dessus en y représentant la Lune dans les trois positions suivantes : au début de l'éclipse, au bout d'une heure, au bout de deux heures.
2. Quelle fraction du diamètre de la Terre représente celui de la Lune ? En utilisant la valeur approchée du diamètre de la Terre trouvée grâce à la méthode d'Erathosthène, déterminer une valeur approchée du diamètre de la Lune.

3. Rechercher l'estimation actuelle du diamètre de la Lune. Quels sont les facteurs d'imprécision de la méthode d'Aristarque qui peuvent expliquer la différence ?

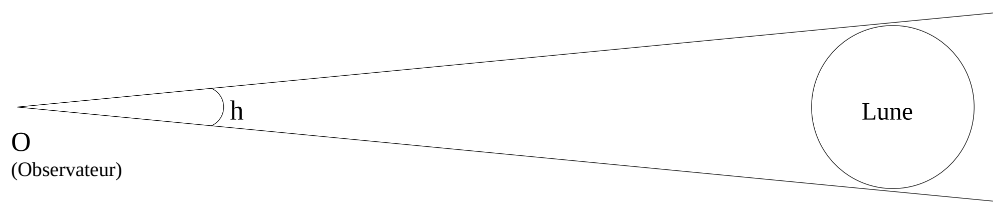
Chapitre 4

Distance Terre-Lune : première approche

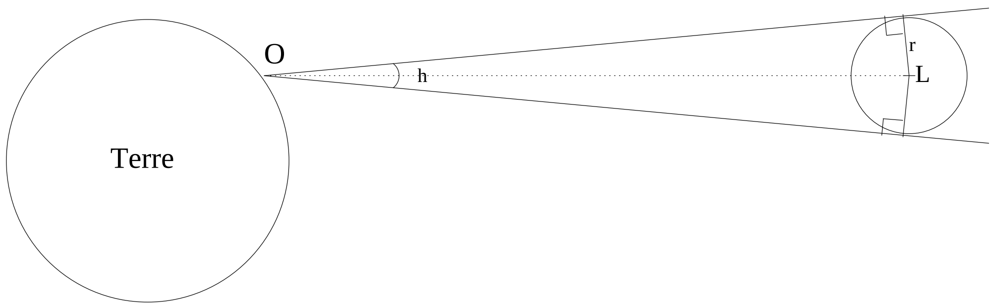
Le but de cette fiche est de montrer, qu'à partir d'observations simples et facilement réalisables, la distance de la Terre à la Lune est bien plus grande que les distances terrestres et notamment plus grande que le rayon de la Terre. Les expériences et les calculs présentés ici conduisent à prouver que la distance Terre-Lune est au moins 30 fois plus grande que le rayon de la Terre.

La principale **observation** qui permet d'arriver à cette conclusion est que**, au cours d'une même nuit, le diamètre apparent de la Lune est sensiblement le même quelque soit le lieu d'observation sur la Terre** (environ $0^\circ, 5 = 30'$).

Définition : On appelle diamètre apparent d'un astre, la mesure de l'angle sous lequel on voit cet astre :



1. Soit un observateur qui se trouve à la position 0 sur la Terre. On appelle L le centre de la Lune et r son rayon.

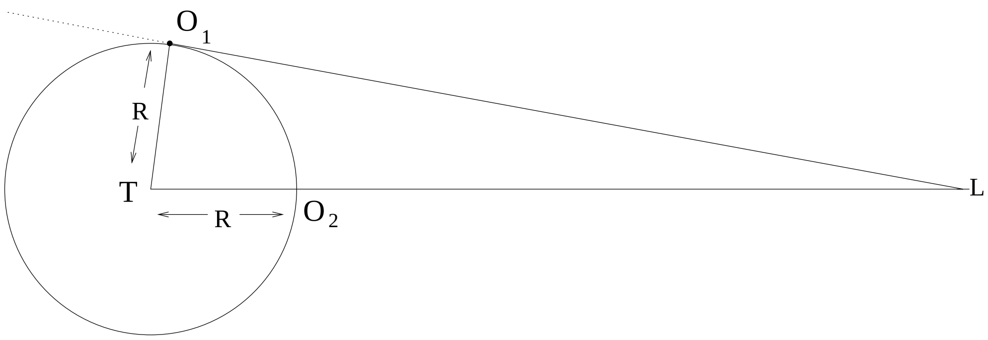


a) Exprimer $\frac{OL}{r}$en fonction de h.

b) Avec $h = 0°, 5$, en déduire que $OL = 229\, r$.

2.Au cours d'une même nuit [1], la mesure du diamètre apparent conduit toujours à la valeur de $0°, 5$ quelque soit le lieu sur la Terre. Cependant, on peut considérer que cette mesure est faite avec une erreur de $1/60$ degré au plus. Faites l'application avec les variations maximales de h suivantes : $h_1 = 0°, 5 - 1/120 = 0°, 492$ et $h_2 = 0°, 5 + 1/120 = 0°, 508$. Comme on a $h_1 \leq h \leq h_2$, en déduire un encadrement de $\frac{OL}{r}$.

3. On peut identifier les 2 valeurs extrêmes de l'encadrement précédent, aux deux positions extrêmes de O sur la Terre de la figure suivante :



La droite O_1L est tangente à la Terre en O_1. Le point O_1 correspond ainsi à la Lune vue à l'horizon. Le point 0_2 correspond à la Lune vue au Zénith (c'est-à-dire juste à la verticale de l'observateur).

On note R le rayon de la Terre.

a) En utilisant le théorême de Pythagore dans le triangle (TO_1L) et en posant $O_1L = k\, O_2L$, montrer que

$$O_2L = \frac{2R}{k^2 - 1}$$

1. Cette affirmation est nécessaire car le diamètre apparent de la Lune est différent lorsqu'elle est à l'apogée $(29', 4)$ et lorsqu'elle est au périgée $(33', 5)$. Dans cette fiche, il est permis de considérer que la distance Terre-Lune ne varie pas au cours d'une même nuit.

b) L'encadrement fait en 2. s'appliquant à O_1 et à O_2, en déduire que :

$$28R \leq O_2L$$

et donc que :

$$29R \leq TL$$

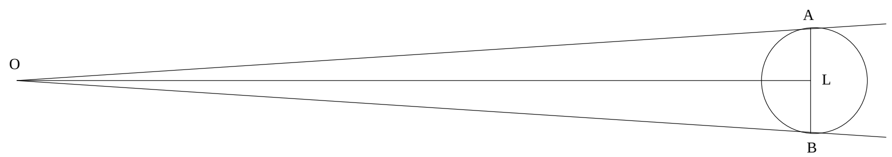
C'est-à-dire que la distance Terre-Lune est au moins 29 fois plus grande que le rayon de la Terre.

Chapitre 5

Distance Terre-Lune par Aristarque

Voici une méthode utilisée par le même Aristarque pour évaluer la distance Terre Lune.

1. Sachant que la Lune met 27 jours[1] pour faire un tour complet, quel angle la Lune parcourt-elle chaque heure autour de la Terre ?
2. Nous avons vu dans l'exercice précédent qu'en une heure la Lune parcourt une distance égale à son diamètre.
   En déduire la mesure de l'angle sous lequel un observateur O situé sur la Terre voit la Lune (angle $\widehat{AOB}$ sur la figure ci-dessous).



3. En supposant que le milieu L de $[AB]$ est le centre de la Lune, et en utilisant la valeur du diamètre de la Lune trouvée précédemment (exercice 1.3), calculer la distance entre l'observateur et le centre de la Lune.

1. C'est la période sidérale de la Lune qui est donnée ici. Elle correspond au temps que met la Lune pour revenir à la même position par rapport aux étoiles. A ne pas confondre avec la lunaison (29,5 jours) qui est l'intervalle de temps séparant deux nouvelles Lune (c'est-à-dire une même configuration du système Soleil-Terre-Lune).

Chapitre 6

Distance Terre-Soleil par Aristarque

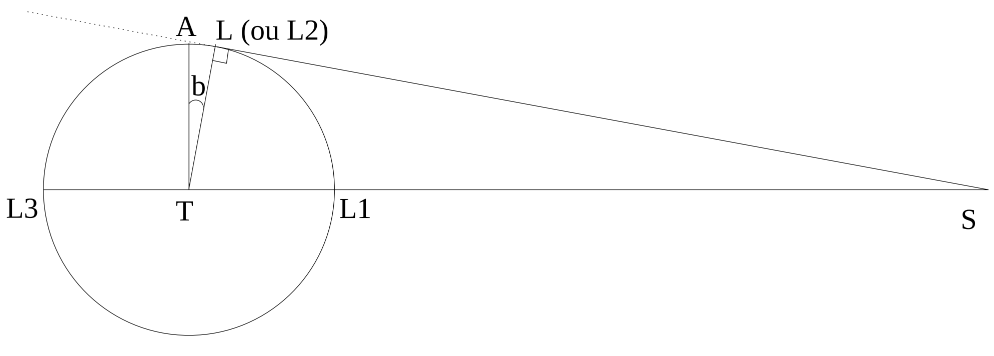
Cette fiche utilise la méthode d'Aristarque (280 avant JC) pour estimer le rapport de la distance Terre-Soleil sur la distance Terre-Lune. L'observation utilisée est la suivante :

L'intervalle de temps séparant la nouvelle Lune (L_1) et le premier quartier (L_2) est plus court que la durée séparant le premier quartier (L_2) de la pleine Lune (L_3).

Du temps d'Aristarque cette différence de durée était estimée à au plus 12 heures. C'est cette valeur que nous prendrons.

On sait aussi que la période de révolution de la Lune autour de la Terre est de 29,5 jours[1].

En supposant le mouvement de la Lune autour de la Terre circulaire uniforme, on peut dessiner la figure suivante :



1. C'est la durée de la lunaison qui est donnée ici puisque, dans la figure, l'axe Soleil-Terre est considéré fixe.

On a montré dans la fiche “Distance Terre-Lune : première approche” que la distance Terre-Lune est au moins 29 fois plus grande que le rayon de la Terre. C’est pourquoi, dans la figure ci-dessus, le rayon de la Terre n’apparait pas : on néglige le rayon de la Terre devant la distance Terre-Lune.

1. Montrer que l’arc $\widehat{L_2A}$ est parcouru en 6 heures. Donner la valeur de b en degrés.

2. $\widehat{ATL} = \widehat{TSL} = b$.

3. En déduite $\frac{TS}{TL} = 19$.

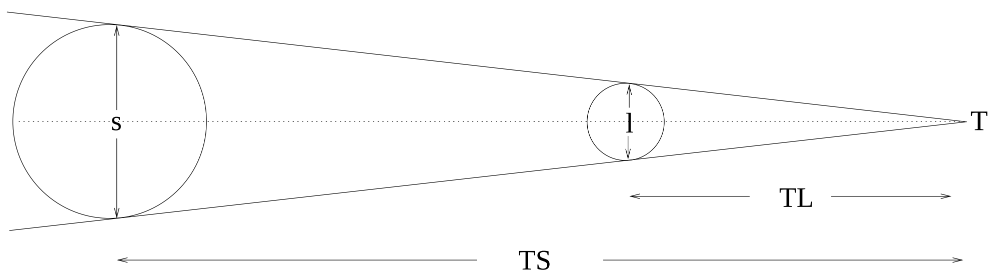
Remarque : Les connaissances actuelles permettent de **calculer** que la différence de durée n’est pas de 12 heures mais est en fait de 35 minutes et donc que $\frac{TS}{TL} = 400$. Néanmoins, la valeur que nous avons trouvée nous donne un premier ordre de grandeur utile pour d’autres estimations.

Chapitre 7

Distance Terre-Lune d'après Hipparque

Cette fiche utilise la méthode d'Hipparque (135 avant JC) pour estimer le rapport de la distance Terre-Lune sur le rayon de la Terre. L'observation utilisée est celle d'une éclipse centrale de Lune (c'est-à-dire lors d'un alignement des centres des 3 astres, dans l'ordre : Soleil, Terre, Lune). Mais il faut tout d'abord exploiter l'observation suivante :

Les diamètres apparents de la Lune et du Soleil sont sensiblement égaux :

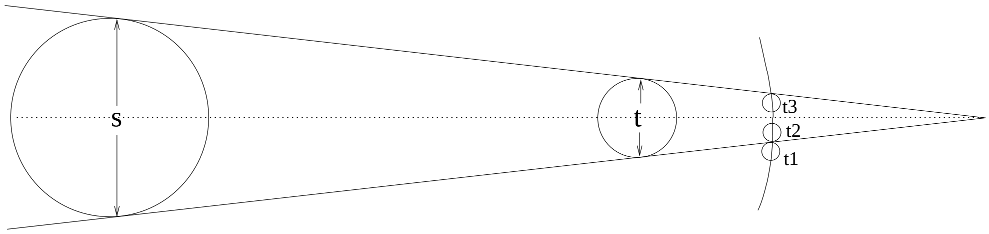


On a noté s le diamètre du Soleil, l celui de la Lune, TS la distance Terre-Soleil et TL la distance Terre-Lune[1].

1- Montrer que $\frac{s}{l} = \frac{TS}{TL}$. On notera n ce rapport et p la distance Terre-Lune, de sorte que $TL = p$ et $TS = np$.

1. On a confondu ici la corde (qui est dessinée) et le diamètre proprement dit (qui ne l'est pas). Le diamètre apparent étant de $0°, 5$ degré, il est facile de vérifier que l'erreur commise est $4\,10^{-5}$.

On modélise l'observation de l'éclipse par Hipparque de la manière suivante[2] :



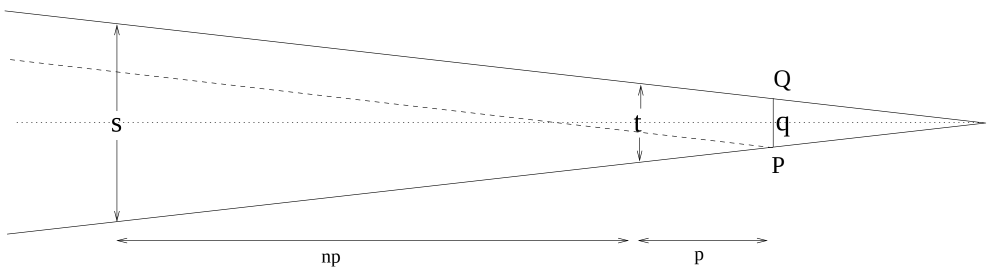
Le triangle représente le cône d'ombre de la Terre. La Lune commence à entrer dans l'ombre de la Terre à l'instant t_1 (premier contact). La Lune est entièrement éclipsée à l'instant t_2 (deuxième contact). La Lune commence à réapparaÃ®tre à l'instant t_3 (troisième contact). Conformément à la figure, la Lune passe par l'axe du cone d'ombre (le Soleil, la Terre et la Lune sont dans le même plan). On dit que l'éclipse est centrale.

L'observation d'Hipparque est la suivante :

Le chronométrage des différentes phases de l'éclipse donne

$$\frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{8}{3}$$

Reproduisons la figure ci-dessus, en ne représentant que le cône d'ombre et les positions des trois astres :



PQ est la portion de la trajectoire de la Lune se trouvant dans le cône d'ombre. On l'assimile à un segment de droite[3] de longueur q. Le diamètre

2. Par souci de lisibilité de la figure, ce dessin n'a pas été fait à l'échelle et l'angle au bout du cône d'ombre est très petit (plus petit que le diamètre apparent du Soleil qui vaut $0°, 5$).

3. C'est encore la petitesse du diamètre apparent du Soleil qui le permet.

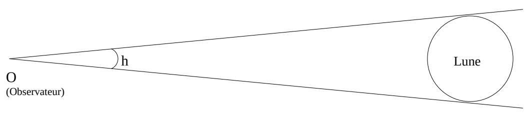
de la Terre est noté t, et on rappelle que, dans la fiche “Distance Terre-Lune : première approche”, on a montré que le rayon de la Terre, R est au moins 30 fois plus petit que la distance Terre-Lune.

2- Montrer que $\frac{t-q}{s-q} = \frac{1}{n+1}$.

3- En utilisant l'observation d'Hipparque, c'est dire $q = \frac{8}{3}l$, en déduire que $l = \frac{3}{11}t\,(1 + \frac{1}{n})$.

On a calculé dans la fiche “Distance Terre-Soleil par Aristarque” la valeur [4] de n. La valeur trouvée nous autorise ici à négliger $\frac{1}{n}$devant 1. On prendra alors $l = \frac{3}{11}t$.

4- Le diamètre apparent de la Lune est $h = 0°, 5$.



En déduire [5] que $p = 115\,l$

5- En déduire que $p = 63R$, c'est à dire que la distance Terre-Lune est environ 60 fois le rayon de la Terre.

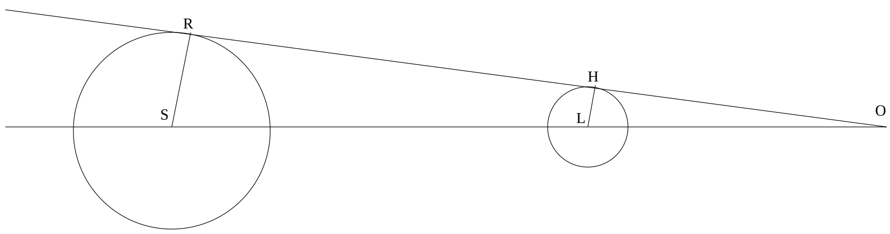
4. Avec la donnée utilisée dans cette fiche, nous avions trouvé $n = 19$. En fait n vaut 400.

5. Voir aussi la fiche “Distance Terre-Lune : première approche”.

Chapitre 8

Diamètre du Soleil

Lors d'une éclipse de Soleil on observe que les diamètres apparents de la Lune et du Soleil sont égaux. On peut donc modéliser une éclipse par la figure suivante.



S est le centre du Soleil, L le centre de la Lune et O l'observateur de l'éclipse.

OL est un rayon visuel tangent à la Lune et au Soleil.

En utilisant les données suivantes :

- Distance Terre-Lune : 384 400 km
- Distance Terre-Soleil : 149 600 000 km
- Rayon de la Lune : 1720 km

Déterminer une approximation du rayon du Soleil.

Chapitre 9

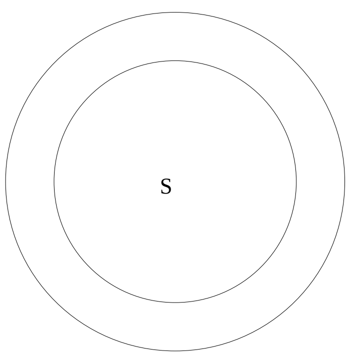
Distance entre le Soleil et Vénus

Vénus est une planète du système solaire que l'on appelle aussi étoile du Berger, du fait de sa luminosité importante qui en fait un repère pour se diriger sur Terre.

Supposant que les orbites de Vénus et de la Terre sont des cercles centrés sur le soleil parcourus de manière uniforme, nous allons déterminer le rapport des rayons de ces orbites.

Il est aisé pour les astronomes de mesurer l'angle $\widehat{STV}$ (où V est Vénus, T la Terre et S le soleil). En faisant des mesures régulières, ils ont constaté que la plus grande mesure prise par cet angle est de 48.

1. Vénus est-elle plus proche ou plus éloignée du Soleil que la Terre ?
2. Nous allons montrer que lorsque l'angle $\widehat{STV}$ est à son maximum alors l'angle $\widehat{STV}$ est droit.
   (a) Supposons que l'angle $\widehat{STV}$ est droit. Que représente alors la droite (TV) pour l'orbite de Vénus ?
   (b) Construire sur la figure ci-dessous les positions V_1 et V_2 de Vénus telles que l'angle $\widehat{SVT}$ soit droit.



3. Quelles sont les positions relatives de l'orbite de Vénus et de l'angle $\widehat{V_1TV_2}$? Justifier.
4. Soit M un autre point de l'orbite de Vénus. Prouver que l'angle $\widehat{STM}$ est inférieur à l'angle $\widehat{STV}$.
5. Calculer le rapport des rayons des orbites de Vénus et de la Terre.

Cette méthode est aussi appelée méthode de la plus grande élongation, terme qualifiant le fait que l'angle $\widehat{SVT}$ est droit lorsque l'angle $\widehat{STV}$ est à son maximum. Elle peut être utilisée pour toute planète se trouvant plus proche du soleil que la Terre. Elle a notamment été utilisée par Nicolas Copernic (1473 – 1543), astronome polonais fervent défenseur du système héliocentrique.

Deuxième partie

Distances dans le système solaire : applications pour le lycée

Chapitre 10

Résolutions de triangles

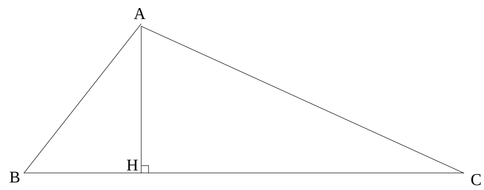
Un triangle posséde 6 éléments : ce sont les 3 angles et les 3 longueurs des côtés. La donnée de 3 seulement de ces éléments suffit à déterminer le triangle sauf si ce sont les 3 angles (trois longueurs ou un angle, deux longueurs ou deux angles, une longueur). Les autres angles et les autres longueurs de ce triangle sont alors déterminés.

Nous allons établir un certain nombre des formules correspondantes.

Ce procédé, appelé résolution d'un triangle, est très utile en astronomie, puisque l'on cherchera notamment à déterminer des distances entre des astres à partir de mesures d'angles, plus aisées à effectuer sur Terre.

A. Formule des sinus.

Considérons un triangle ABC. Nous allons démontrer la propriété suivante dite formule des sinus : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$



Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Prouver que :

$$AH = AB \sin \hat{B}$$

2. Prouver que :

$$AH = AC \sin \hat{C}$$

3. Déduire des questions 1. et 2. que :

$$\frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$$

4. Achever la démonstration.

B. Formule d'Al Kashi.

Nous allons prouver que pour tout triangle ABC :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\,AB\,AC\,\cos\widehat{A}$$

Ceci constitue une généralisation du théorème de Pythagore à un triangle quelconque, connue sous le nom de formule d'Al Kashi.

1ère démonstration : à l'aide du théorème de Pythagore.

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de B.

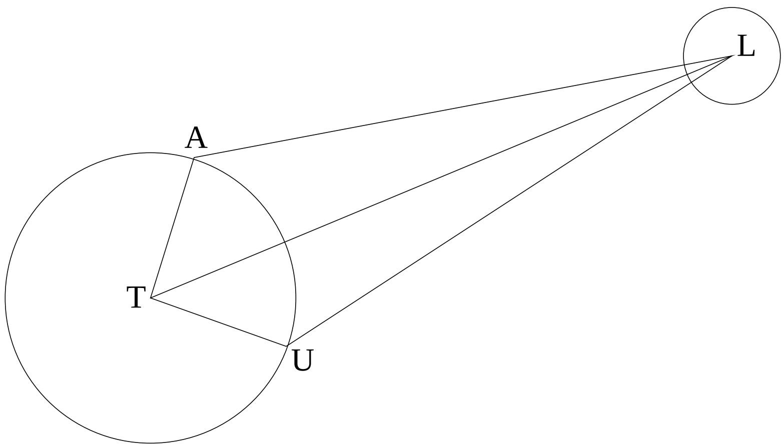
1. On suppose dans un premier temps que H appartient à $[AB]$. Prouver que : $AC^2 = AH^2 + CH^2 + 2\,AH\,CH$
2. Prouver que : $AB^2 = AH^2 + BH^2$.
3. Déduire de 1 et 2 que : $AB^2 + AC^2 = BH^2 + CH^2 + 2\,AH^2 + 2\,AH\,CH$
4. En déduire que : $AB^2 + AC^2 = BC^2 + 2\,AH\,AC$
5. Conclure, puis refaire la démonstration dans le cas où H n'appartient pas à $[AB]$.

2ème démonstration : à l'aide du produit scalaire.

En appliquant la relation de Chasles au vecteur $\overrightarrow{BC}$, développer son carré scalaire et retrouver la formule.

Chapitre 11

La distance Terre-Lune par résolution de triangles



Soit T le centre de la Terre, L le centre de la Lune.

A et U sont deux points d'un même méridien terrestre de latitudes respectives φ et φ'.

De plus A se trouve dans l'hémisphère nord et U dans l'hémisphère sud.

En A et en U on mesure à l'aide d'un théodolite la distance zénithale de la Lune au moment où son centre coupe le plan méridien.

On notera θ la distance zénithale de la Lune en A (le supplémentaire de l'angle $\widehat{TAL}$) et θ' la distance zénithale de la Lune en U (le supplémentaire de l'angle $\widehat{TUL}$).

On connaît le rayon de la Terre (par exemple grâce à la méthode d'Erathostène), on le note r.

1. Exprimer l'angle $\widehat{TAU}$ en fonction de φ et φ'.

2. A l'aide du 1. exprimer les angles $\widehat{UAL}$ et $\widehat{AUL}$ en fonction de φ, φ', θ, θ'. En déduire l'expression de l'angle $\widehat{ALU}$ en fonction de φ, φ', θ, θ'.
3. a. Exprimer la distance AU en fonction de r, φ et φ'.

Indication : on pourra se placer dans le triangle isocèle TAU.

1. Exprimer la distance AL en fonction de φ, φ', θ, θ'.

indication : formule des sinus dans le triangle AUL.

1. Exprimer la distance TL en fonction de φ, φ', θ, θ'.

indication : formule d'Al Kashi dans le triangle

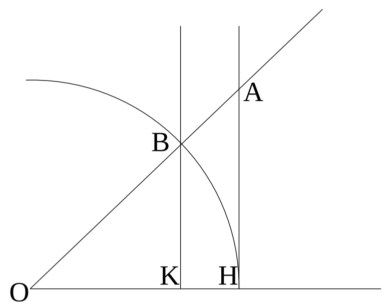
Chapitre 12

Détermination de la distance Terre-Lune

A. Approximation du sinus d'un petit angle.

Le but de cette partie est de trouver une approximation du sinus d'un petit angle.

Considérons un cercle de centre O de rayon 1. Notons H et B les points d'intersection de ce cercle et des côtés d'un angle aigu de sommet O dont on notera x la mesure en radians. Soit K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle OBH. Soit A le point d'intersection de la droite (OB) et de la tangente en H au cercle.



1. Comparer la longueur du petit arc de cercle joignant H et B à la longueur du segment $[KB]$.

En déduire que :

$$\sin x < x$$

2. Comparer l'aire de la portion de disque se trouvant à l'intérieur de l'angle $\widehat{BOH}$ à l'aire du triangle OAH. En déduire que :

$$x < \tan x$$

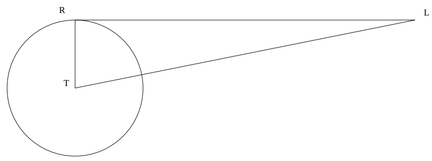
3. Déduire des questions 1 et 2 que :

$$x \cos x < \sin x < x$$

A l'aide de la calculatrice déterminer un encadrement de x pour lequel sin x et x diffèrent de moins de 0,1%.

B. Parallaxe horizontale équatoriale.

Appelons T le centre de la Terre, L le centre de la Lune et R un point de la surface de la Terre tel que le triangle RTL soit rectangle en R. L'angle RTL ne dépend pas du choix du point R. On l'appelle ***parallaxe horizontale équatoriale de la Lune***.

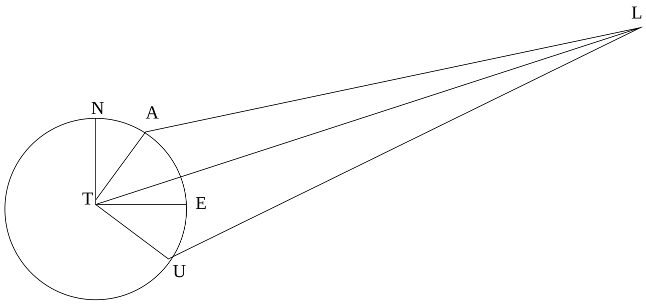


Notons p la mesure en radians de cette parallaxe, d la distance Terre-Lune, et r le rayon de la Terre.

1. Prouver que : $\sin p = r/d$

2. Par une autre méthode Aristarque de Samos (310-250 av. J.-C.) a évalué la distance Terre-Lune à environ 450 000 km. De plus Erathostène (280-198 av. J.-C.) a évalué le rayon de la Terre à environ 6000 km. Est-il judicieux d'assimiler $\sin p$ à p ?

D. Méthode de calcul de la distance Terre-Lune.



Appelons T le centre de la Terre, L le centre de la Lune, N le pôle nord terrestre. Notons d la distance Terre-Lune ($d = TL$) et r le rayon de la Terre.

A l'aide d'un théodolite on mesure l'angle que fait la Lune avec la verticale au même instant en deux points A et U d'un même méridien terrestre dont on connaît les latitudes. On notera respectivement a et u les mesures de ces angles en degrés et l_a et l_u les latitudes des points A et U.

Grâce à ces mesures on déterminera la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

Connaissant le rayon de la Terre on déduira de la formule 1 du paragraphe C la distance Terre-Lune.

Appelons E le point de l'équateur se trouvant sur le méridien passant par les points A et U.

On supposera que le point A se trouve dans l'hémisphère nord, le point U dans l'hémisphère sud et que l'axe Terre-Lune coupe la surface de la Terre entre les points A et$U$.

1. Prouver que :

$$\begin{cases} \widehat{ALT} = a - \widehat{ATL} \\ \widehat{ULT} = u - \widehat{UTL} \end{cases}$$

En déduire que :

$$\widehat{ALU} = a + u - (l_a + l_u)$$

2.a. En appliquant la formule des sinus aux triangles ALT et ULT prouver que :

$$\begin{cases} \frac{\sin \widehat{ALT}}{r} = \frac{\sin a}{d} \\ \frac{\sin \widehat{ULT}}{r} = \frac{\sin u}{d} \end{cases}$$

b. En déduire que :

$$\begin{cases} \sin \widehat{ALT} = \sin p \times \sin a \\ \sin \widehat{ULT} = \sin p \times \sin u \end{cases}$$

où p est la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

c. D'après l'étude menée à la question 2 de la partie C on peut déduire de la question 2.b. que :

$$\begin{cases} \widehat{ALT} = p \sin a \\ \widehat{ULT} = p \sin u \end{cases}$$

En déduire que :

$$\widehat{ALU} = p(\sin a + \sin u)$$

3.a. Déduire des question 1. et 2.c. que :

$$p = \frac{a + u - (l_a + l_u)}{\sin a + \sin u}$$

b. Calculer la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune puis la distance Terre-Lune.

Chapitre 13

Distance entre Mars et le Soleil

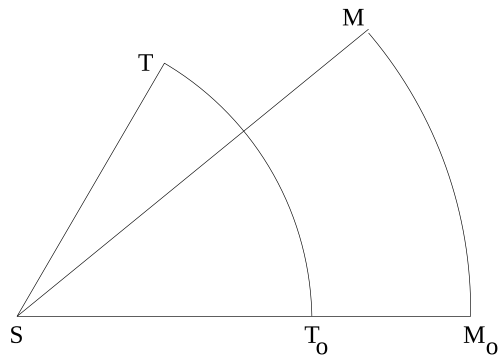
Mars est la première planète du système solaire se trouvant au delà de l'orbite terrestre. Nous supposerons dans un premier temps que son orbite est un cercle centré sur le soleil, dans le plan de l'orbite terrestre.

A. Période de révolution sidérale de Mars.

Nous savons observer quand Mars est à l'opposition, c'est à dire quand Mars, la Terre et le Soleil sont alignés, la Terre étant entre Mars et le Soleil.

En observant tous les soirs, on peut donc déterminer la durée qui sépare deux oppositions. On l'appelle période de révolution synodique, on le note σ. On a $\sigma \approx 779$ jours.

Considérons la figure suivante.



A l'instant $t = 0$, Mars (point M_0) est à l'opposition. La Terre est au point T_0.

A un instant t, Mars se trouve en M et la Terre en T.

On observe que la Terre tourne plus vite que Mars. Cela implique que $\widehat{TST_0} \quad > \quad \widehat{MSM_0}$

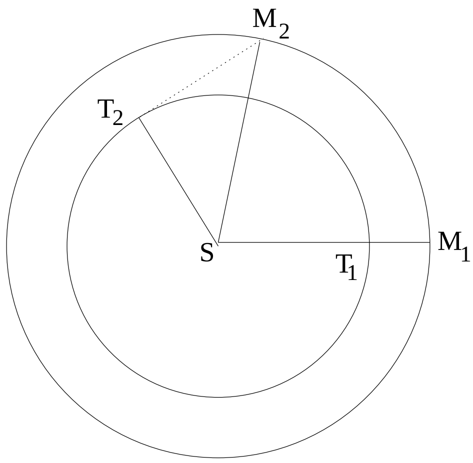
1. En supposant que Mars se déplace uniformément, exprimer l'angle $\widehat{MSM_0}$ en fonction de t et de sa période de révolution sidérale que l'on notera μ.
2. En supposant que la Terre se déplace uniformément, exprimer l'angle $\widehat{TST_0}$ en fonction de t et de sa période de révolution sidérale que l'on notera τ.
3. En déduire l'expression de l'angle $\widehat{MST}$ en fonction de t, μ, τ.
4. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{MST}$ lorsque $t = \sigma$?

En déduire l'expression de μ en fonction de σ et τ, puis faire une application numérique avec $\tau = 365$ jours (arrondir à l'unité).

B. Rayon de l'orbite de Mars.

Depuis la Terre on peut observer que 106 jours après que le Soleil et Mars aient formé un angle plat avec la Terre (opposition), ils forment un angle droit (quadrature).

Nous appellerons S le soleil, T_1 et M_1 les positions respectives de la Terre et de Mars en opposition, et T_2 et M_2 leurs positions respectives en quadrature.



1. Sachant que la période de révolution de la Terre est de 365 jours, calculer un arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{T_2ST_1}$.
2. Sachant que la période de révolution de mars est de 687 jours, calculer un arrondi au degré de la mesure de l'angle $\widehat{M_2SM_1}$.
3. Déduire des questions 1 et 2 une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{T_2SM_2}$.

Exprimer alors le rapport du rayon de l'orbite de Mars au rayon de l'orbite de la Terre.

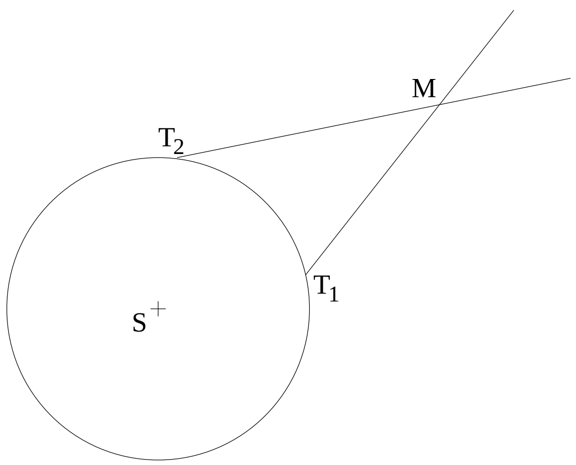
C. Construction à l'échelle de l'orbite de Mars.

Voici une méthode qui a été utilisée par l'astronome allemand Kepler (1571-1630) pour déterminer l'orbite de Mars.

Méthode.

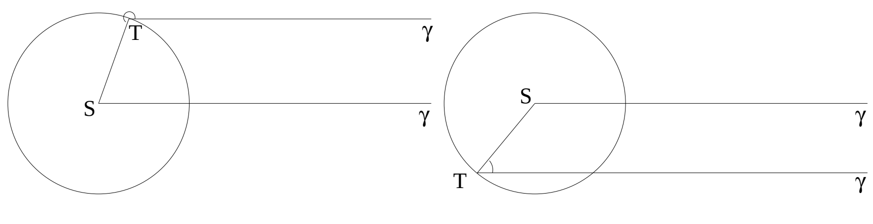
Nous supposerons que l'orbite de la Terre est un cercle centré sur le soleil et que l'orbite de Mars et l'orbite de la Terre sont coplanaires.

Traçons un cercle de 5 cm de rayon représentant l'orbite de la Terre. Notons S son centre. Le point S représente donc le soleil. Nous allons construire 5 points de l'orbite de Mars en respectant l'échelle du dessin.



Nous savons que la période de révolution sidérale de Mars est de 687 jours. Cela signifie que si nous faisons deux observations de Mars à 687 jours d'intervalle, celle-ci se trouve au même endroit, tandis que la Terre se trouvera en deux positions différentes T_1 et T_2. Si grâce à ces observations nous parvenons sur notre dessin à tracer les demi-droites $[T_1M)$ et $[T_2M)$, nous aurons un point de l'orbite de Mars à l'intersection de ces deux demi-droites.

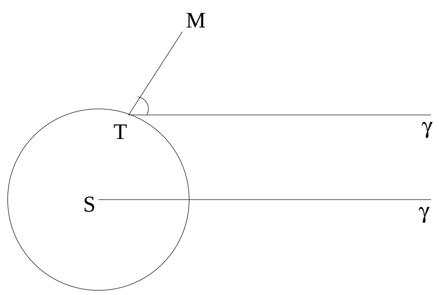
Longitude géocentrique.



Longitude géocentrique du Soleil.

Fixons une demi-droite $[S\gamma)$ sur notre figure, que l'on appelle direction du point vernal.

Les astronomes savent mesurer l'angle orienté de demi-droites $([T\gamma),[TS))$, qu'ils appellent longitude géocentrique du soleil (Figures "Longitude géocentrique du Soleil"), et l'angle orienté de demi-droites $([T\gamma),[TM))$, qu'ils appellent longitude géocentrique de Mars (Figures "Longitude géocentrique de Mars").



Longitude géocentrique de Mars.

En compilant les observations de l'astronome danois Tycho Brahé (1546-1601), Kepler a pu établir une liste de 5 couples de mesures des longitudes géocentriques du soleil (λ_S) et de Mars (λ_M). Elles se trouvent dans les deux premières colonnes du tableau ci-dessous :

date	λ_S	λ_M	l_T
17-02-1585	339°23′	135°12'	
05-01-1587	295°21′	182°08′	
19-09-1591	185°47′	284°18′	
06-08-1593	143°26′	346°56′	
07-12-1593	265°53′	3°04′	
25-10-1595	221°42′	49°42′	
28-03-1587	16°50′	168°12′	
12-02-1589	333°42′	218°48′	
10-03-1585	359°41′	131°48′	
26-01-1587	316°06′	184°42′	

Longitude Héliocentrique.

Afin de placer les positions de la Terre correspondants aux mesures effectuées, il nous faut disposer de l'angle orienté de demi-droites $([S\gamma), [ST))$, que l'on appelle longitude héliocentrique de la Terre, et que l'on note l_T.

Etablir une relation entre $\lambda_S$et l_T puis compléter la troisième colonne du tableau.

Construction des 5 points de l'orbite de Mars.

Pour chaque couple de mesures, construire les points T_1 et T_2 de l'orbite de la Terre grâce à la longitude héliocentrique de la Terre puis construire les demi-droites $[T_1M)$ et $[T_2M)$ grâce à la longitude géocentrique de Mars.

Orbite de Mars.

1. Tracer un nouveau cercle de centre S et de 5 cm de rayon. A l'aide d'une feuille de calque y reporter les cinq points de l'orbite de Mars trouvés ci-dessus. Ces cinq points déterminent dix segments. Tracer les médiatrices de chacun de ces segments.
2. Ces dix médiatrices sont-elles concourantes ? A quoi cela peut-il être dû ?
3. Choisir un point O à l'intérieur du polygone formé par ces dix médiatrices. Tracer un cercle de centre O passant approximativement par les cinq points de l'orbite de Mars.

Le fait que les médiatrices ne soient pas concourantes ne s'explique pas uniquement par les imprécisions de mesure. Kepler démontra que l'orbite de Mars est en fait une ellipse dont un foyer est le soleil. Sa faible excentricité fait qu'on peut l'assimiler à un cercle dont le centre est peu éloigné du soleil. Grâce au dessin nous pouvons estimer cette excentricité : c'est le rapport de la distance SF au rayon de l'orbite de Mars. On trouve environ 1/10.

Cette faible excentricité permet d'affirmer que les résultats des parties A et B restent d'une précision satisfaisante malgré l'hypothèse faite dans ces parties que l'orbite de Mars est un cercle centré sur le Soleil.

Troisième partie

Mouvements célestes et mesure du temps

Chapitre 14

Miss Campbell et le rayon vert

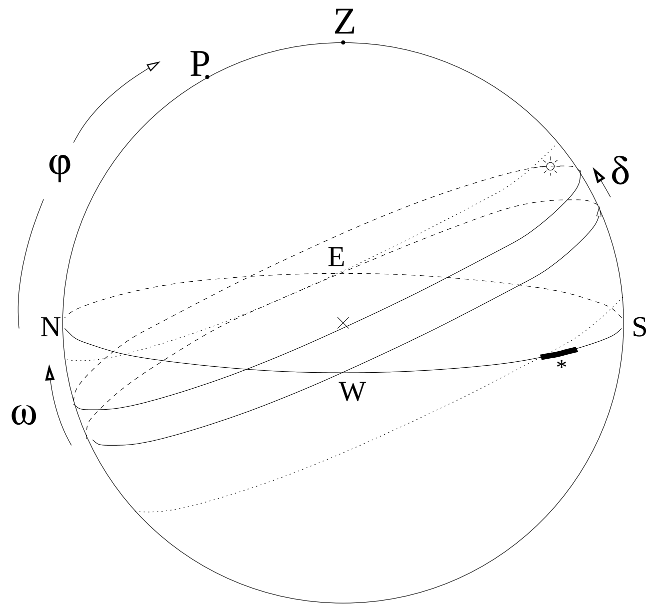
Voici un extrait du roman de Jules Verne “Le rayon vert”. Miss Campbell cherche à observer le rayon vert qui est un phénomène optique qui se produit juste après le coucher du Soleil (ou symétriquement, juste avant le lever du Soleil) : il s'agit du dernier rayon émis par le Soleil avant qu'il ne disparaisse [1].

"Cependant le soleil n'avait pas encore dépassé le milieu de sa course diurne. Sous le cinquante-sixième parallèle, sept heures, au moins devaient s'écouler avant qu'il ne disparût sous les flots, - sept heures d'impatience pour Miss Campbell ! D'ailleurs cet horizon se dessinait dans le sud-ouest, c'est-à-dire sur un segment d'arc que l'astre que l'astre radieux n'effleure qu'à l'époque du solstice d'hiver. Ce n'est donc pas là qu'il fallait chercher l'apparition du phénomène ; ce serait plus à l'ouest, et même un peu au nord, puisque les premiers jours du mois d'août précèdent de six semaines l'équinoxe de septembre."

Livre de Poche, page 44

Commentez ce texte. Notammment on donnera une estimation (aussi précise que permettent les données de ce texte), au moment où Miss Campbell se fait ces réflexions, de la longitude du Soleil, de sa déclinaison, de l'heure du coucher (et la durée du jour) et de son azimut à son coucher.

1. Miss Campbell est écossaise et selon une légende de son pays, voir le rayon vert permet de lire clair dans les sentiments et les coeurs.



Sur le dessin de cette Figure, on a dessiné la sphère locale selon la scène décrite p44 (ed. Livre de Poche) dans "Le rayon vert" de Jules Verne.
C'est-à-dire :

- “le cinquante-sixième parallèle” : $\varphi = 56°$, ce qui donne la position de la hauteur du pôle P sur l'horizon.

- “les premiers jours du mois d'août précédent de six semaines l'équinoxe de septembre” : Parmi tous les parallèles à l'équateur céleste correspondant à la trajectoire diurne du soleil pour un jour donné, on a pris celui qui est entre $\delta = 0$ (équinoxe) et $\delta = +\omega$ (solstice d'été, $\omega = 23°26'$).

- “le soleil n'avait pas encore dépassé le milieu de sa course diurne” : Le soleil est positionné un peu avant midi, c'est-à-dire un peu avant le méridien sud (demi cercle PZS) sur le parallèle à l'équateur céleste de sa trajectoire diurne.

- “un segment d'arc que l'astre radieux n'effleure qu'à l'époque du solstice d'hiver.” : Voir * de la Figure.

En plus de la figure, on peut effectuer des calculs grâce aux quelques indications numériques :

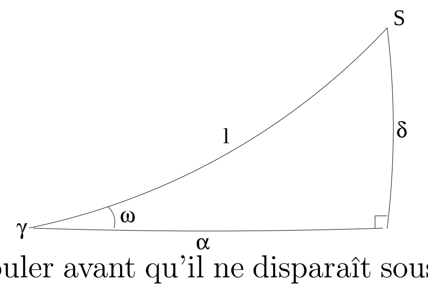
- “précèdent de six semaines l'équinoxe de septembre” : en supposant un mouvement régulier du Soleil sur l'écliptique, cela fait $\frac{42\text{j } 360°}{365{,}25\text{j}} = 41°, 4$ et donc la longitude du Soleil sur l'écliptique est $l = 180° - 41°, 4 = 138°, 6$

- Déclinaison du Soleil : On a

$$\sin\delta = \sin\omega \sin l = 0,26297$$

, d'où

$$\delta = 15°$$



- “sept heures, au moins devaient s'écouler avant qu'il ne disparaît sous les flots, -sept heures d'impatience pour Miss Campbell !". L'angle horaire pour une hauteur nulle s'obtient par la formule

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\delta$$

soit $\cos H = -0,4042$ et $H = \pm 114° = 7\text{h},6 = 7\text{h}35\text{mn}$.

- "ce serait plus à l'ouest, et même un peu au nord". L'azimut au coucher est donné par :

$$\sin A = \cos\delta \sin H = 0,8825$$

soit $A = 62°$ (lever) ou $\underline{118°}$ (coucher). C'est donc au nord-ouest.

Chapitre 15

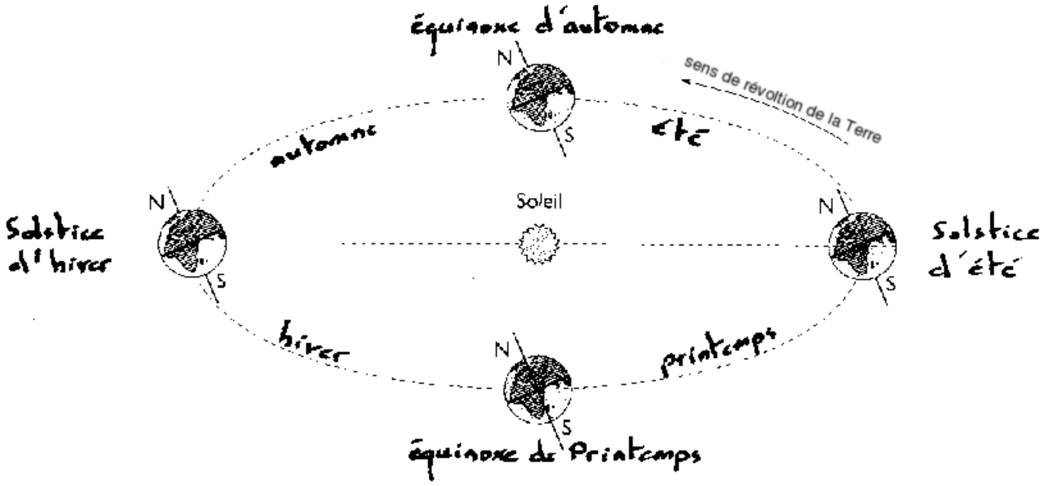
Mouvement du Soleil dans le ciel

La Terre est animée de deux mouvements :

- une rotation autour d'un axe passant par son centre et la coupant en deux points que l'on appelle pôle nord et pôle sud. La durée de cette rotation définit le jour.
- Une révolution autour du soleil. La durée de cette révolution définit l'année.

Saisons.

Lors de la révolution de la Terre autour du soleil, l'axe des pôles reste constamment orienté dans la même direction. Ceci permet de définir les saisons.



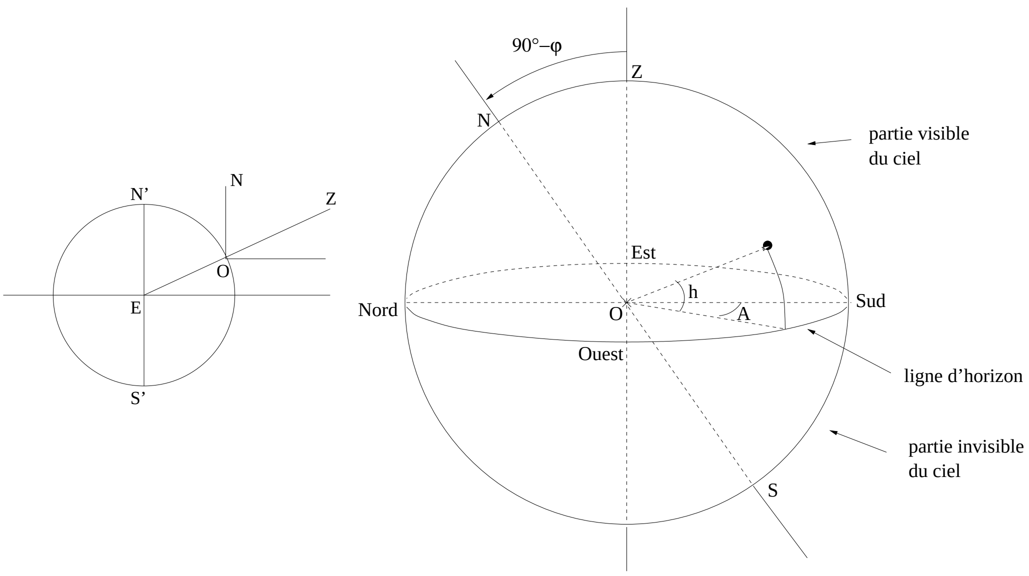
Le solstice d'été est le jour le plus long, le solstice d'hiver le jour le plus court dans l'hémisphère nord. Les équinoxes ont lieu deux fois par an lorsque la nuit et le jour sont de durée égale. On définit alors les saisons de la façon suivante :

- l'hiver est la période entre le solstice d'hiver et l'équinoxe de printemps.
- le printemps est la période entre l'équinoxe de printemps et le solstice d'été.
- l'été est la période entre le solstice d'été et l'équinoxe d'automne.
- l'automne est la période entre l'équinoxe d'automne et le solstice d'hiver.

Sphère locale.

Pour un observateur se trouvant sur la Terre le ciel apparaît comme une sphère centrée sur lui. On l'appelle sphère locale. On appelle zénith le point de cette sphère se trouvant à la verticale de l'observateur et ligne d'horizon le grand cercle perpendiculaire au rayon passant par le zénith.

Chaque étoile peut être repérée sur la sphère locale grâce à la mesure de deux angles, l'azimut et la hauteur.



Terre

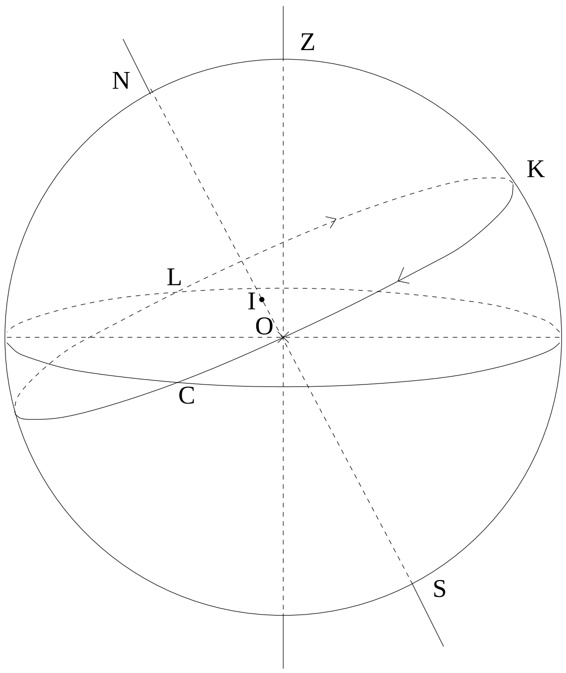
O : observateur
Z : zénith
N : direction du pôle nord terrestre
S : direction du pôle sud terrestre

Sphère locale

A : azimuth
h : hauteur
φ : latidude

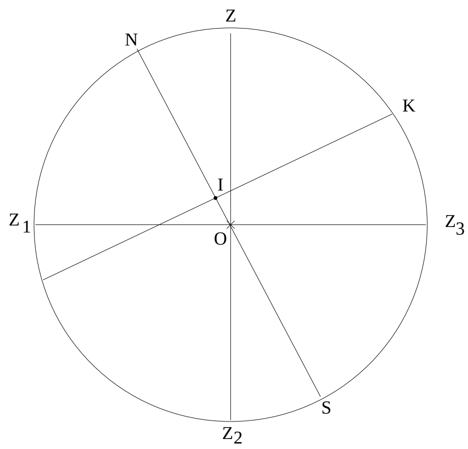
Trajectoire du soleil dans le ciel.

Du fait de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles nous voyons le soleil décrire chaque jour dans le ciel un cercle autour de cet axe. L'intersection de ce cercle avec la ligne d'horizon correspond au lever et au coucher du soleil.



Perspective de la sphère locale

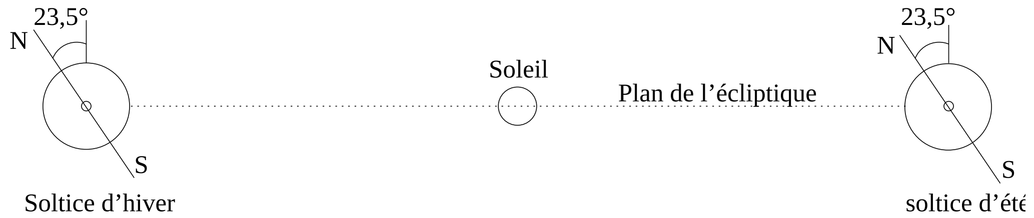
O : observateur
L : lever du soleil
K : culmination du soleil
C : coucher du soleil
I : centre du cercle décrit par le soleil sur la sphère locale



Projection de la sphère locale sur le grand cercle contenant l'axe des pôles et le zénith

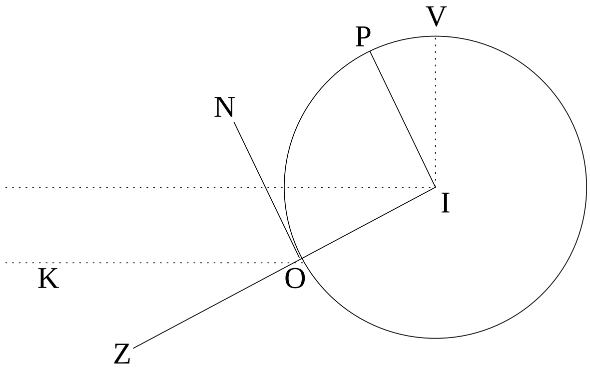
1. Faire une représentation en perspective de la sphère locale en un point de l'équateur terrestre puis une projection sur le grand cercle contenant l'axe des pôles et le zénith.
2. Même question au pôle nord.
3. Même question en un point de l'hémisphère sud.

On a pu mesurer que l'axe des pôles de la Terre est incliné de 23,5 ° par rapport à la perpendiculaire au plan de rotation de la Terre autour du soleil (appelé plan de l'écliptique).



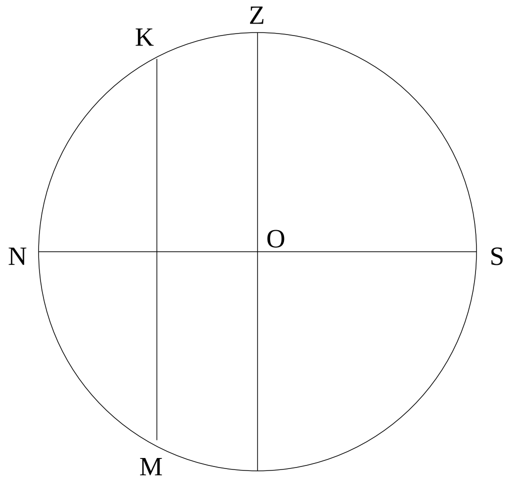
Nous pouvons en déduire la figure suivante de la Terre au solstice d’été :

I : centre de la Terre.
P : pôle nord.
O : point de l’équateur.
KO : rayon solaire.
$\widehat{PIV} = 23,5$



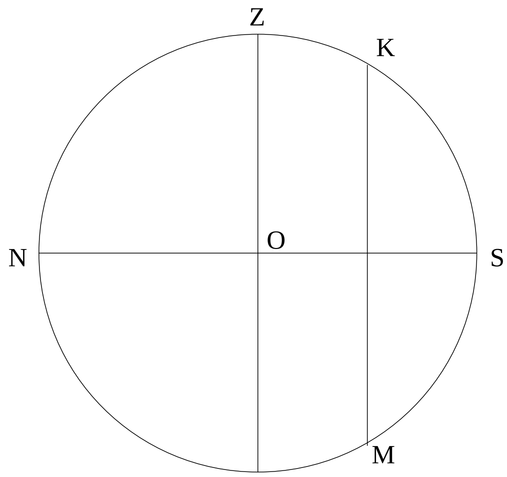
A l’équateur le soleil culmine donc avec un angle de $23,5$ vers le nord par rapport au zénith le jour du solstice d’été, d’où la figure suivante de la sphère locale en O.

$[KM]$ est la trajectoire
du soleil au solstice d’été
L’angle $\widehat{KOZ}$ mesure $23,5$

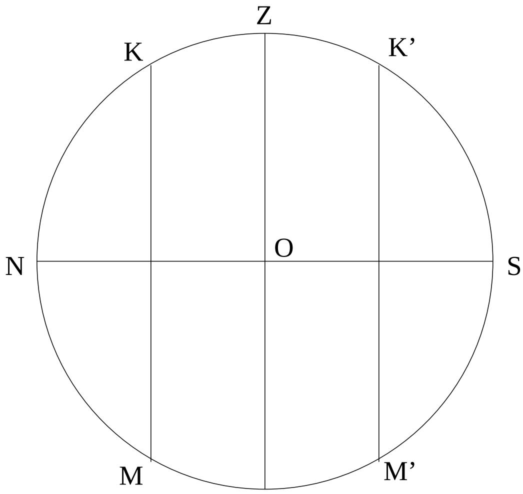


De même le soleil culmine avec un angle de $23,5$ vers le sud par rapport au zénith le jour du solstice d’hiver :

$[KM]$ est la trajectoire du soleil au solstice d'hiver. L'angle $\widehat{KOZ}$ mesure $23,5$



Tout au long de l'année les cercles décrits par le soleil dans le ciel sont donc compris entre ces deux cercles limites :



1. En déduire les trajectoire possibles du soleil vu depuis un point quelconque de l'hémisphère nord.
2. Même question au pôle nord.

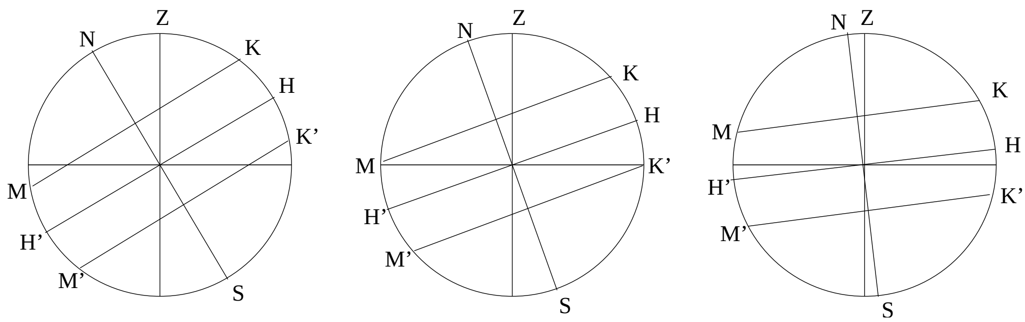
Où le soleil ne se couche-t-il pas ?

Les trois figures suivantes sont des projections de la sphère locale en trois lieux de latitudes différentes. ($[MK]$ est la trajectoire au solstice d'été et $[M'K']$ la trajectoire au solstice d'hiver)

Dans le premier cas le soleil se couche toujours.

Dans le troisième cas il existe plusieurs jours pour lesquels le soleil ne se couche pas.

Le deuxième cas est le cas limite où le soleil ne se couche pas le jour du solstice d'été.



1. Le but de cette question est de déterminer la latitude φ du cas limite (deuxième figure).

   (a) Combien mesure l'angle $\widehat{KOH}$?

   (b) Exprimer en fonction de φ l'angle $\widehat{NOZ}$.

   (c) En déduire l'expression en fonction de φ de la mesure de l'angle $\widehat{KMO}$.

   (d) Prouver que les angles $\widehat{KMO}$ et $\widehat{MKO}$ sont égaux.

   (e) Prouver que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{KOH}$ sont égaux.

   (f) Déduire des questions c, d, e l'expression de la mesure de l'angle $\widehat{KOH}$ en fonction de φ puis déterminer φ. Cette latitude détermine sur chaque hémisphère un cercle que l'on appelle **cercle polaire**.

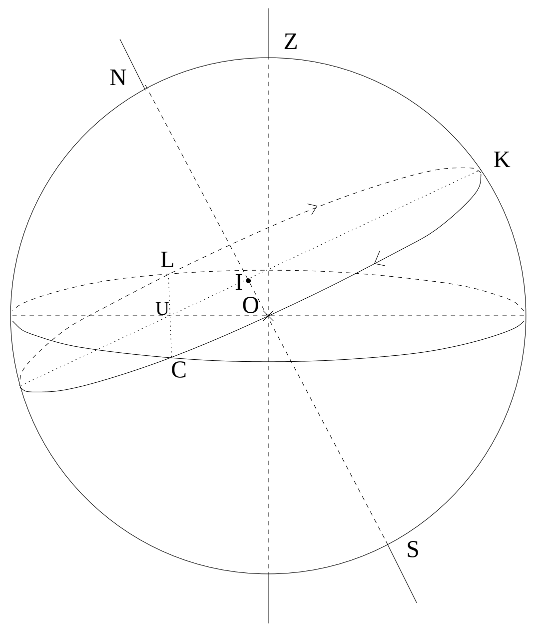
2. A l'aide d'une mappemonde citer des pays dans lesquels il arrive que le soleil ne se couche pas.

A une date donnée, à quelle heure se couchera le soleil ?

Nous allons déterminer à quelle heure se couche le soleil le 10 avril sachant que :

•La latitude est de 30.

•Le soleil culmine en faisant un angle de $67,8$ avec l'horizon.



1. Faire une projection de la sphère locale sur le grand cercle contenant l'axe des pôles et le zénith à l'échelle en prenant 5 cm de rayon pour le grand cercle.

2. A l'aide de la figure de la question 1 dessiner la projection à la même échelle de la sphère locale sur le cercle décrit par le soleil le 10 avril.

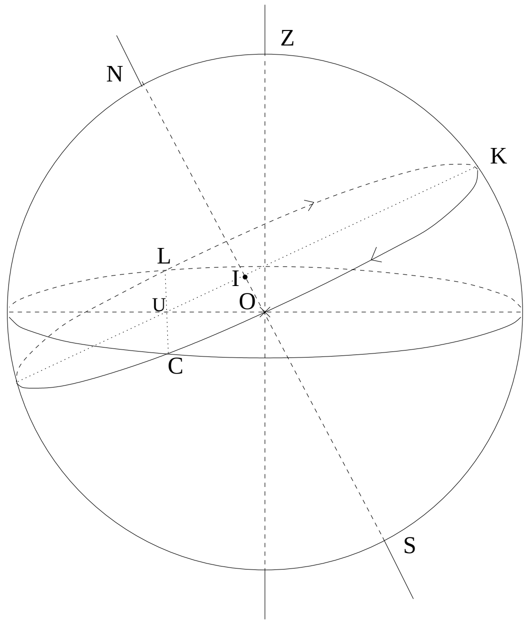
3. Mesurer l'angle $\widehat{KIC}$ sur la figure précédente. En déduire l'heure à laquelle se couche le soleil le 10 avril.

Déterminer l'heure et la date auxquelles a été prise une photo.

Nous allons déterminer l'heure et la date à laquelle a été prise la photo ci-jointe, sachant que :

•La latitude de Paris est de 49.

•Par rapport au photographe l'angle entre l'arc de triomphe et le nord est de 65 vers l'ouest.



1. Faire une vue à l'échelle du cercle de l'horizon. (On prendra à nouveau un rayon de 5 cm)
2. a. Faire une projection de la sphère locale sur le grand cercle contenant l'axe des pôles et le zénith sans chercher à respecter les proportions.
   (a) Prouver que l'angle $\widehat{IOZ}$ est le complémentaire de la latitude.
   (b) Faire à présent une figure à l'échelle.
   (c) Mesurer l'angle $\widehat{KOH}$ où H est le point de culmination du soleil aux équinoxes. Expliquer sans calculs pourquoi la connaissance de cette angle permet de déterminer deux dates auxquelles la photo a pu être prise.
3. Faire une vue à l'échelle du cercle décrit par le soleil sur la sphère locale. Mesurer l'angle $\widehat{CIK}$ et en déduire l'heure à laquelle a été prise la photo.

FIGURE 15.1 – Photos Godefroy Troude, 1997

Chapitre 16

Lever et coucher d'un astre

On se propose dans cette fiche de calculer l'azimut et l'heure (ou son angle horaire) d'un astre à l'instant de son lever ou de son coucher.

On suppose que l'observateur est en un lieu de latitude φ et on considère un astre de déclinaison δ. On appelle R le rayon de la sphère locale. En fait, la valeur de R est arbitraire. Pour le dessin, nous prendrons la valeur 5 cm.

Les 3 figures de la page suivante représentent une coupe de cette sphère céleste, chacune correspondante aux 3 premières questions.

1. On se place dans le plan méridien. Ce plan est le plan du grand cercle contenant l'axe des pôles et le zénith.

   (a) En utilisant le triangle OIK, exprimer IK et OI en fonction de R et de δ.

   (b) En utilisant le triangle OBI, exprimer OI et IB en fonction de OB et de φ. En déduire l'expression de OB en fonction de R, φ et δ.

2. On se place maintenant dans le plan de l'horizon. Considérer le triangle OBC et exprimer $\cos A$ en fonction de φ et δ.
3. On se place enfin dans le plan du cercle décrit par l'astre sur la sphère locale.

   (a) Calculer $\cos \widehat{BIC}$ en fonction de IB et IC.

   (b) En déduire l'expression de $\cos H$ en fonction de φ et δ.

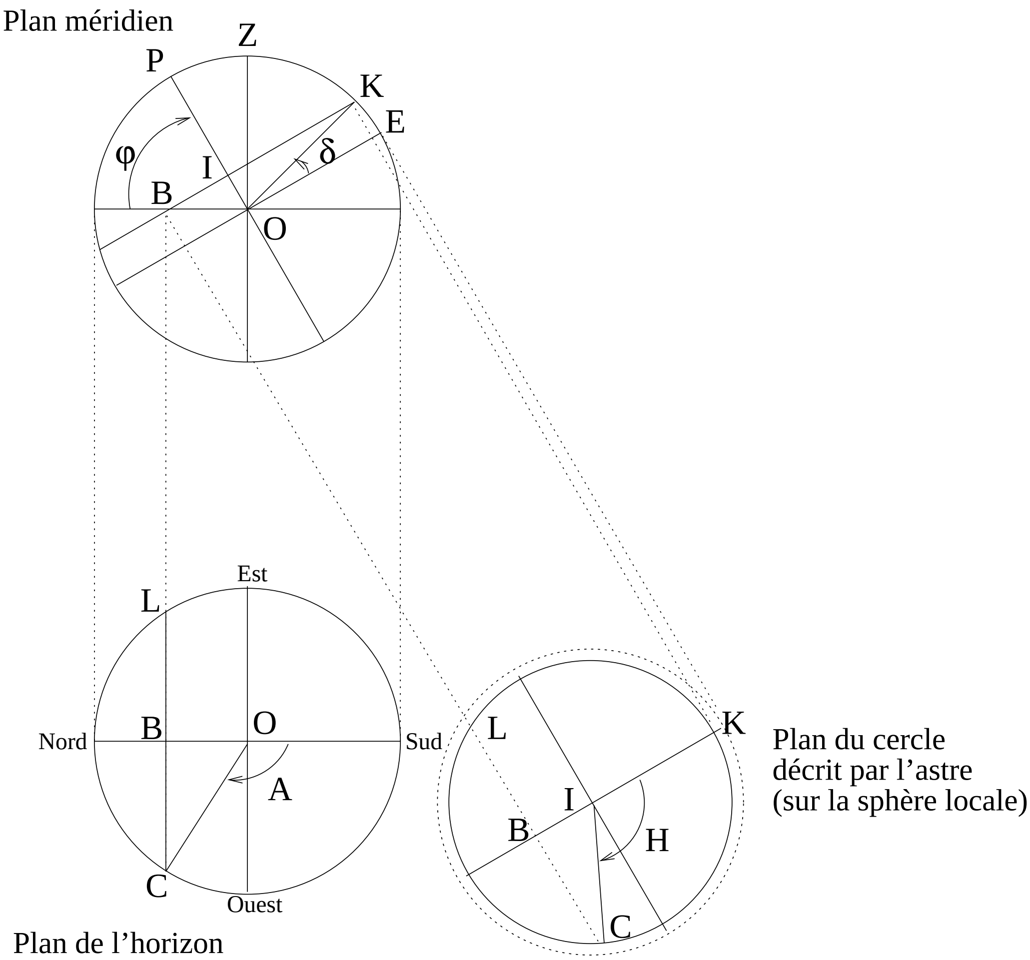


FIGURE 16.1 – Lever et coucher d'astre : vues suivant plusieurs plansxxxx

4. Faites quelques applications à différentes valeurs de δ et à différentes valeurs de φ. On pourra, par exemple, choisir δ correspondant aux équinoxes ($\delta = 0$) et aux solstices ($\delta = \pm 23°26'$).

Chapitre 17

Levers simultanés

17.1 Introduction

17.1.1 Objectif

On se propose de déterminer la date de l'année, pour laquelle une étoile donnée et le Soleil se lèvent simultanément, en un lieu de latitude φ.

17.1.2 Prérequis

On suppose connu les propositions suivantes :

17.1.2.1

Pour un astre quelconque d'ascension droite α, dont l'angle horaire est H à l'instant sidéral θ, on a

$$H = \theta - \alpha \qquad (1)$$

17.1.2.2

En un lieu de latitude φ, pour un astre de déclinaison δ qui a un lever et un coucher, les angles horaires H correspondant à ces deux positions sont donnés par

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\delta \qquad (2)$$

Cette relation a été obtenue dans le chapitre *Lever Coucher*
On obtient deux valeurs opposées de H.

17.1.2.3

Si on désigne par ω l'obliquité de l'écliptique , c'est-à-dire l'angle formé par les deux plans de l'écliptique et de l'équateur céleste, alors l'ascension droite α, la déclinaison δ, et la longitude l du Soleil vérifient les relations

$$\tan\delta = \tan\omega\sin\alpha \qquad (3)$$

$$\tan\alpha = \cos\omega\tan l \qquad (4).$$

Pour obtenir ces relations, il suffit de considérer la figure ci-jointe, et de calculer de deux façons différentes, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$,dans le repère $(O, \overrightarrow{O\gamma}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$.
On peut écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l)\overrightarrow{OK} \\ &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l)((\cos\omega)\overrightarrow{OA} + (\sin\omega)\overrightarrow{OP}) \\ &= (\cos l)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin l\cos\omega)\overrightarrow{OA} + (\sin l\sin\omega)\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (\cos\delta)\overrightarrow{OM_1} + (\sin\delta)\overrightarrow{OP} \\ &= \cos\delta((\cos\alpha)\overrightarrow{O\gamma} + (\sin\alpha)\overrightarrow{OA}) + (\sin\delta)\overrightarrow{OP} \\ &= (\cos\delta\cos\alpha)\overrightarrow{O\gamma} + (\cos\delta\sin\alpha)\overrightarrow{OA} + (\sin\delta)\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \cos l = & \cos\delta\cos\alpha \qquad (5) \\ \sin l\cos\omega = & \cos\delta\sin\alpha \qquad (6) \\ \sin l\sin\omega = & \sin\delta \qquad (7) \end{cases}$$

En divisant membre à membre, d'une part les relations (7) et (6), d'autre part les relations (6) et (5), on obtient les formules annoncées.

17.2 Calcul de l'heure sidérale du lever de l'étoile

On connaît la latitude φ du lieu d'observation, et la déclinaison δ de l'étoile, la relation (2) donne $\cos H$ au moment du lever, d'où deux valeurs opposées de H mais comme il s'agit du lever, on prend la valeur négative.
La relation (1) fournit ensuite θ, soit θ_0 la valeur obtenue.

Il faudra ensuite déterminer la date pour laquelle le Soleil se lève quand le temps sidéral local est θ_0.

Application à l'étoile Sirius

On se place en Egypte en un lieu de latitude $\varphi = 30$, on donne $\omega = 2326'$.
Les coordonnées équatoriales de Sirius sont

$$\alpha = 6h42mn, \delta = -1637'$$

On obtient successivement

$$\cos H_S = 0,1723 \qquad H_S = 18h40mn,$$

soit

$$H_S = -(5h20mn) \qquad \theta_0 = H_S + \alpha = 1h22mn$$

17.3 Calcul de l'angle horaire $H_\odot$ et de l'ascension droite $\alpha_\odot$ du Soleil

La formule (1) donne une relation entre α et H, et les formules (2) et (3) fournissent une relation entre $\sin\alpha$ et $\cos H$ à savoir

$$\cos H = -\tan\varphi \tan\omega \sin\alpha.$$

On obtient ainsi un système non linéaire qu'on résout de deux équations à deux inconnues α et H.
On est conduit au système

$$\begin{cases} \sin\alpha_\odot = -3,993\cos H_\odot \\ \alpha_\odot = 1h22mn - H_\odot \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha_\odot = 20,42 - H_\odot \\ \sin(20,42 - H_\odot) = -3,993\cos H_\odot \end{cases}$$

en développant

$$0,3489\cos H_\odot - 0,9372\sin H_\odot = -3,993\cos H_\odot \quad \Longrightarrow \quad \tan H_\odot = 4,6328$$

ce qui donne $\qquad H_\odot = 77,82 \pm 180$
Comme il s'agit d'un lever

$$H_\odot = -102,18 = 17h11mn$$

$$\alpha_\odot = \theta_0 - H_\odot = 1h22mn - 17h11mn = 8h11mn = 122,6$$

17.4 Longitude du Soleil et date cherchée

Une fois l'ascencion droite déterminée, la relation (4) donne la longitude du Soleil.
On fait ensuite l'hypothèse que le Soleil se déplace sur l'écliptique avec une vitesse uniforme, pour obtenir la date cherchée.

La longitude l du Soleil vérifie

$$\tan l = \frac{\tan \alpha_\odot}{\cos \omega} = -1,7044 \qquad l = 120,4$$

Cette longitude est atteinte au bout de t jours solaires après le 20 mars, date de l'équinoxe de printemps, et on a

$$120,4 = \frac{360}{365,25} t \qquad t = 122 jours$$

On obtient la date du 142 mars, c'est-à-dire le 111 avril ou le 81 mai ou le 50 juin soit enfin le 20 juillet. On ne peut pas observer le lever simultané parce que la luminosité du Soleil est bien plus grande que celle de Sirius.
L'ascension droite de Sirius est fixe alors que celle du Soleil est croissante, il en résulte que l'étoile se lève de plus en plus tôt avant le Soleil, et se voit de mieux en mieux chaque jour.
Le lever héliaque de Sirius se produit quelques jours après le 20 juillet.
On peut aussi remarquer que le jour sidéral est de 23 h 56 mn alors que le jour solaire est de 24 h, pour justifier que l'étoile se lève de plus en plus tôt avant le Soleil.

Chapitre 18

Cadran Solaire

Un cadran solaire est un appareil rudimentaire qui permet de déterminer par simple lecture, en un lieu donné, le temps solaire vrai local c'est-à-dire tout simplement l'angle horaire du soleil. Nous allons décrire le principe de fonctionnement d'un cadran solaire méridional.

On rappelle que le plan méridien d'un lieu O est déterminé par sa verticale la parallèle à l'axe des pôles, passant par O.

Sur un mur vertical bien lisse orienté plein sud, c'est-à-dire perpendiculaire au plan méridien d'un point O de ce mur, on fixe parallèlement à l'axe des pôles, une tige rigide appelée style, l'ombre qu'elle porte sur le mur permet de déterminer l'angle horaire du soleil, c'est ce que l'on se propose de montrer dans l'exercice qui suit.

18.1 Les graduations du cadran

On suppose que l'on se trouve en un lieu de latitude $\phi = 51°$(Lille)

1°) Dessiner la sphère céleste de centre O point d'attache du style en y représentant les éléments essentiels : le zénith Z du lieu, le pôle céleste nord P, le cercle qui représente la trace du mur sur la sphère, et le cercle horaire du soleil à un instant donné.[1]

2°) On note B l'intersection de ces 2 cercles (du côté de Z). Montrer que B est l'intersection avec la sphère céleste de la demi-droite opposée à celle définie par l'ombre du style sur le mur.

3°) On considère le triangle sphérique PZB, on appelle x l'arc ZB, vérifier que l'angle des demi-plans (OZ, OP) et (OZ, OB) est droit et établir la liste des éléments connus de ce triangle.

1. On se reportera ensuite à la Figure 18.1 pour la correction.

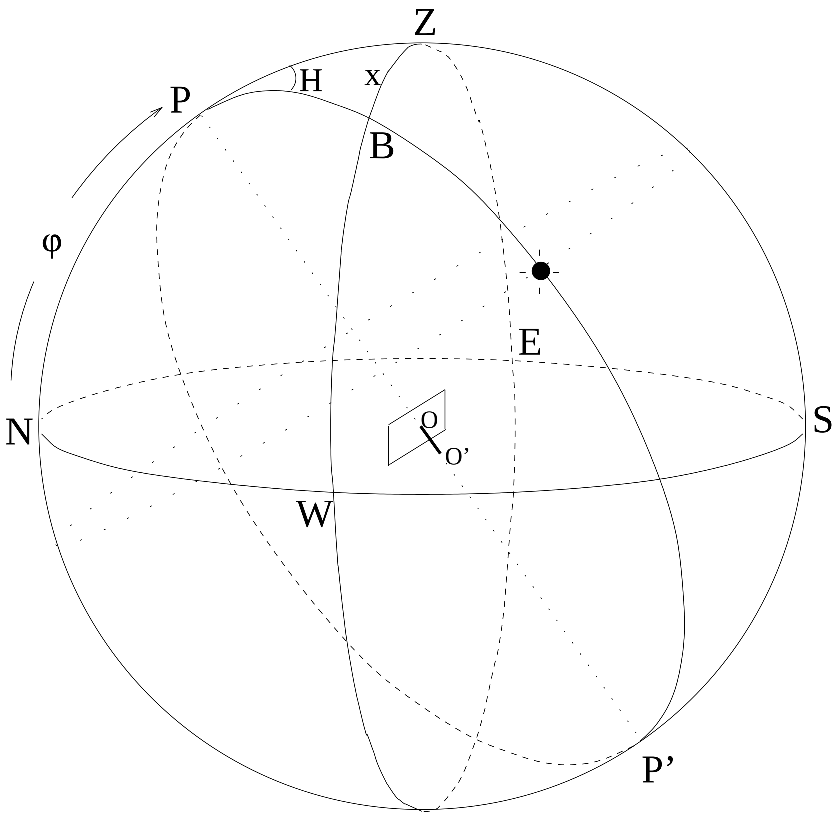


FIGURE 18.1 – Le cadran solaire

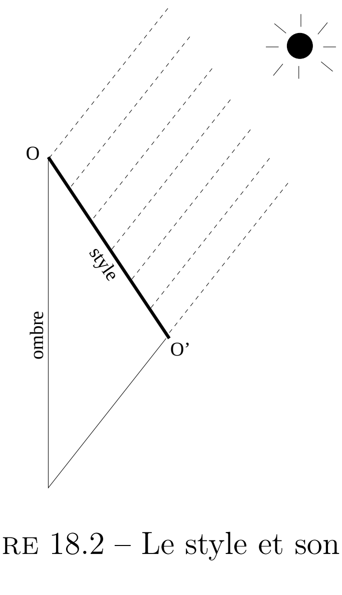


FIGURE 18.2 – Le style et son ombre

On rappelle la formule des cotangentes dans un triangle sphérique d'éléments (a, b, c, A, B, C)

$$\sin b \cot a = \sin C \cot A + \cos b \cos C$$

En déduire la formule $\tan x = \tan H \cos \phi$

4°) Comment détermine-t-on x à l'aide du cadran ?

5°) Dessiner les ombres portées d'heure en heure à partir de midi jusque $18h$ (pourquoi $18h$?)

18.2 Longueur de l'ombre

On se propose maintenant de décrire la courbe parcourue par l'ombre de l'extrémité O' du style portée sur le mur.

1°) On peut considérer avec une très bonne approximation qu'au cours de son mouvement diurne le rayon joignant le soleil à O' décrit un cône de révolution de sommet O' et d'axe OO', l'intersection de ce cône avec le plan du cadran est donc un arc de conique qui dégénère en une droite aux équinoxes, pourquoi ?

2°) à Lille c'est toujours un arc d'hyperbole, pourquoi ?

3°) Calculer la longueur des ombres portées par un style de longueur $1m$ aux solstices d'hiver et d'été à midi heure solaire vraie (à Lille toujours).

4°) Décrire pour les périodes d'automne et d'hiver la ligne des levers et couchers du soleil.

5°) Construire un cadran solaire à partir de toutes ces indications.

18.3 Construction des arcs d'hyperbole sur un cadran

On se propose de construire les deux arcs de l'hyperbole, correspondant aux ombres de l'extrémité du style, portées sur le cadran au cours des jours des solstices d'été et d'hiver. Pour des raisons de symétrie il est clair que l'axe principal de cette hyperbole est la verticale du plan du cadran passant par O, point d'attache du style.

Les sommets A et A' sur cet axe sont les ombres à midi solaire vrai. Connaissant la latitude du point O, on peut les construire.

On peut énoncer le théorème de Dandelin de la manière suivante :

L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan ne passant pas par son sommet est une conique dont l'excentricité e est égale à $\dfrac{\cos\phi}{\cos\theta}$, où θ est le demi-angle au sommet du cône (angle de son axe et d'une génératrice quelconque) et ϕ l'angle du plan et de l'axe.

La donnée des sommets A et A' de la conique, donc de son centre Ω, et de l'excentricité $e = \dfrac{\Omega F}{\Omega A}$ nous permet de construire les foyers F et F' et finalement la conique point par point suivant la méthode classique.

Application : Construire les arcs correspondant aux solstices dans le cas où la latitude du lieu où est fixé le cadran est égale à 51^o (latitude de Lille).

Montrer que dans ce cas, quel que soit le jour de l'année l'arc est toujours un arc d'hyperbole.

Construire les arcs correspondant à une autre période de l'année, que vous choisirez.

Chapitre 19

Rétrogradation de Mars

En observant périodiquement dans le ciel la planète Mars on constate qu'elle se déplace par rapport aux étoiles dans le sens opposé à celui qu'elle a habituellement. Ce phénomène astronomique est nommé rétrogradation.

Le but de ce premier travail est d'interpréter ce mouvement rétrograde de la planète par un changement de repère et d'estimer l'angle et la durée de l'arc de rétrogradation de Mars en utilisant un modèle héliocentrique simplifié : la Terre et Mars tournent autour du Soleil suivant des trajectoires ou orbites circulaires à vitesses angulaires constantes et dans un même plan, le plan de l'écliptique.

En effet comment expliquer qu'une planète qui tourne pratiquement sur un cercle centré sur le Soleil ait une trajectoire aussi surprenante vue depuis la Terre ?

19.1 Trajectoires de la Terre et de Mars autour du Soleil

On considère que les centres de la Terre et de Mars ont des mouvements circulaires uniformes concentriques et coplanaires de périodes sidérales respectives $T = 365,25j$ et $T' = 686,98j$.

Le rapport du rayon de l'orbite de Mars sur le rayon de l'orbite terrestre est : $\dfrac{a'}{a} \simeq 1,52$

Les deux planètes tournent autour du Soleil dans le sens trigonométrique direct (sens inverse des aiguilles d'une montre si l'on regarde le système solaire en étant placé au dessus du pôle nord du Soleil ou de la Terre), la Terre tournant plus vite que Mars parce qu'elle est plus proche du Soleil.

Le repère héliocentrique choisi a pour origine le centre du Soleil et son axe des abscisses est donné par la direction d'une opposition (alignement Soleil-Terre-Mars dans cet ordre à un instant donné fixé à $t = 0$ origine des temps). L'axe des ordonnées est perpendiculaire à l'axe des x et il est orienté de façon à ce que l'on passe des x aux y en tournant dans le sens direct.

1. Représenter à l'échelle les trajectoires des deux planètes ainsi que le repère héliocentrique $x\mathrm{S}y$ sur une feuille de papier millimétré (prendre 5 cm pour représenter la distance de la Terre au Soleil)
2. Déterminer les vitesses angulaires n et n' de la Terre et de Mars à 0,0001 près (la vitesse angulaire est dénommée moyen mouvement par les astronomes et elle est exprimée en $^\circ$ /j)
3. Placer sur ces trajectoires les positions successives des planètes à intervalles de 30 jours, avant et après l'opposition. Se limiter à 120 jours avant et 240 jours après l'alignement. Les positions terrestres sont notées de T_{-4} à T_8 de même pour Mars de M_{-4} à M_8 où l'indice désigne le nombre d'intervalles de 30 jours.

19.2 Trajectoire de Mars dans un repère lié à la Terre

A l'instant t, on considère le repère géocentrique d'origine le centre de la Terre et dont les deux axes sont respectivement parallèles à ceux du repère héliocentrique. En effet, supposons que les deux axes centrés sur le Soleil S donnent les directions perpendiculaires de deux étoiles éloignées E_1 et E_2. Comme la distance Soleil-Terre est négligeable devant les distances du Soleil aux étoiles E_1 et E_2 (les étoiles sont rejetées à l'infini), les directions de $[\mathrm{SE}_1$ et $[\mathrm{TE}_1$ sont confondues et les axes $[\mathrm{S}x)$ et $[\mathrm{T}X)$ sont donc parallèles. On a le même raisonnement pour les deux autres axes $[\mathrm{S}y)$ et $[\mathrm{T}Y)$.

1. Sur un papier-calque, tracer un repère géocentrique $X\mathrm{T}Y$
2. En procédant par translation circulaire du repère géocentrique (papier calque mobile) dans le repère héliocentrique (papier millimétré fixe), relever les positions successives de Mars sur le calque.

Les physiciens parlent de translation circulaire pour qualifier à la fois le passage à chaque instant t du repère fixe (héliocentrique) au repère mobile (géocentrique) par translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ST}}$ et la rotation autour de S d'un angle dépendant du temps de l'origine T du repère mobile.

19.3 Interprétation de la trajectoire apparente de Mars

1. A l'aide du document obtenu, quelle est la forme de la trajectoire de Mars dans le repère géocentrique $X\mathrm{T}Y$? Son mouvement est-il uniforme ? La portion de courbe obtenue présente-t-elle une symétrie attendue ?
2. En se servant d'une règle pour relier la Terre aux différentes positions de Mars, montrer qu'elle se déplace pour un observateur terrestre d'abord dans le sens direct, puis dans le sens rétrograde avant de reprendre son mouvement normal !
3. Les étoiles ont-elles ce type de déplacement dans le référentiel géocentrique ? Cela justifie-t-il l'appellation de planète donnée à Mars par les Anciens ?
4. Pour traduire de façon plus quantitative la rétrogradation, dresser un tableau de valeurs déduit de la lecture du graphique

position	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
temps t en j													
$\lambda(t)$ en $^\circ$													

   λ désigne la longitude géocentrique de Mars (à définir en cours) puis en tracer la courbe en fonction du temps.
   $\lambda = \mathrm{mes}(\widehat{x\mathrm{T}M})$
5. Mesurer l'angle de rétrogradation. Quelle précision peut-on attendre de cette méthode ?
6. Estimer la durée de rétrogradation

19.4 Conclusion

Pour traduire comment la longitude géocentrique λ varie en fonction du temps, on introduit un nouveau tableau qui résume les résultats importants de cette étude.

1. Construire et compléter le tableau de variation de $\lambda(t)$

t	-120	-30	30	240
$\lambda(t)$				
Vocabulaire des Mathématiques				
Vocabulaire de l'Astronomie				

2. Etudier comment varie la distance Terre-Mars en fonction du temps en établissant le tableau de variation d'après le graphique. Que peut-on dire sur le diamètre apparent de Mars lors d'une opposition ? A l'œil nu comment apparait alors la planète ?

t	-120	0	240
$\rho(t)$			

$\rho(t)$ désigne la distance TM à l'instant t

3. Dresser un tableau de valeurs et tracer la courbe en fonction du temps
Exprimer en fonction de a et de a' ρ_{max} et ρ_{min} en raisonnant sur le modèle héliocentrique
Lorsque la Terre, le Soleil et Mars sont alignés dans cet ordre, les astronomes parlent de conjonction.
4. Une planète inférieure comme Vénus peut-elle rétrograder ? A titre d'exercice pour les plus courageux, reprendre l'étude graphique avec les données suivantes relatives à Vénus : sa période de révolution sidérale est de 224,70 j et le rapport des rayons des orbites est égal à 0,72.
Marquer les positions des planètes, à intervalles de 10 jours, avant et après un alignement Soleil-Vénus-Terre dans cet ordre (alignement appelé conjonction inférieure). Se limiter à 100 jours avant et 100 jours après l'alignement.
5. Enfin, le Soleil rétrograde-t-il ? Quelles sont les trajectoires du Soleil dans les deux repères utilisés ? Sa trajectoire apparente rencontre-telle celle de Mars dans le repère géocentrique ? Un Martien voit-il la Terre rétrograder ?
Pour aller plus loin, il faudra introduire deux nouvelles grandeurs (les longitudes héliocentriques de la Terre et de la planète étudiée) et les relier au temps. Surtout, il sera indispensable de généraliser les notions de sinus, cosinus et tangente d'un angle non nécessairement aigu !

Quatrième partie

Repérage et configurations astronomiques

Chapitre 20

Longitude et latitude

20.1 Définitions

On considère que la Terre est une sphère de centre O. La Terre tourne sur elle-même autour d'un axe passant par les deux pôles qu'on désigne par N et S ; cet axe contient le point O, il a une direction fixe dans l'espace et son prolongement passe par l'Etoile Polaire [1]. Quand on observe le ciel au cours d'une nuit, on constate que les étoiles se déplacent. Ce mouvement apparent résulte de la seule rotation de la Terre autour de son axe. Pour s'en convaincre, il suffit de diriger un appareil photographique pendant une ou deux heures vers l'Etoile Polaire, on constate que les étoiles décrivent des arcs de cercles concentriques dont le centre est proche de l'Etoile Polaire.

L'**équateur terrestre** est le cercle, intersection de la Terre avec le plan diamétral perpendiculaire à la droite (NS) (Fig. 20.1).

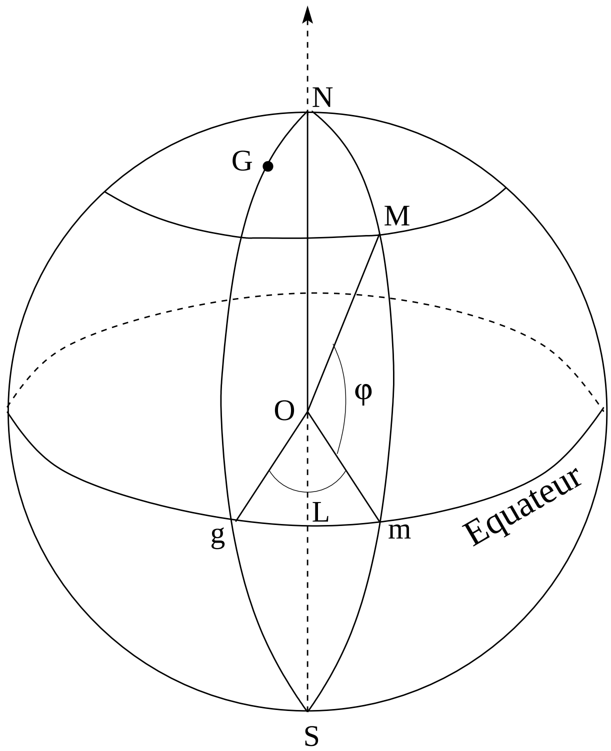
On appelle **méridien terrestre** tout demi-cercle de diamètre $[NS]$.

On appelle **parallèle terrestre** l'intersection de la Terre avec un plan parallèle au plan de l'équateur.

A l'exception des deux pôles, chaque point de la Terre est l'intersection d'un méridien et d'un parallèle, tous les deux uniques.

Les parallèles sont repérés par leur position par rapport à l'équateur, l'angle $\widehat{mOM}$ est la **latitude** du point M ; par convention, on dit que la latitude est positive lorsque le point est situé dans l'Hémisphère Nord, on la compte de $0°$ à $90°$; on dit que la latitude est négative lorsque le point est situé dans l'Hémisphère Sud, on la compte alors de $0°$ à $-90°$.

1. Il s'agit d'une approximation , plus précisément l'axe des pôles passe par un point situé à moins de $1°$ de l'Etoile Polaire



Les méridiens sont repérés par rapport à un méridien pris comme origine, le méridien qui passe par l'observatoire de Greenwich dans la banlieue de Londres ; l'angle $\widehat{gOm}$ est la**longitude** du point M, on la compte de 0° à 180° pour les lieux situés à l'EST du méridien origine, de 0° à $-180°$ pour les lieux situés à l'OUEST du méridien origine.

Mis à part les deux pôles, tout point de la Terre peut être repéré par sa longitude et sa latitude ; la longitude n'est pas définie pour les pôles, mais la latitude 90° caractérise le Pôle Nord, et la latitude $-90°$ le Pôle Sud.

20.2 Mesure de la latitude

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la latitude d'un lieu sur la Terre on peut utiliser l'Etoile Polaire ou le Soleil.

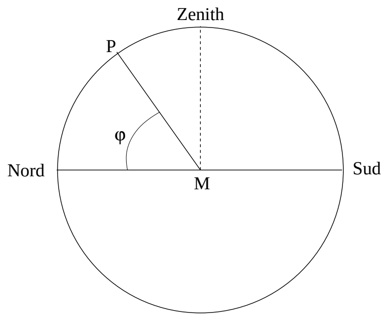
20.2.1 Utilisation de l'Etoile Polaire

1. On peut mesurer l'angle $\widehat{MON}$ qu'on appelle colatitude, en utilisant l'Etoile Polaire et la droite (OM) qui représente la verticale du lieu

matérialisée par un fil à plomb ; la latitude φ est alors donnée par

$$\varphi = 90 - \widehat{MON}.$$

2. La latitude est aussi l'angle $\widehat{PMH}$ où H est la direction de l'horizon Nord et P la direction de l'Etoile Polaire (Fig. 20.2.1). Pour déterminer la latitude, il suffit donc de mesurer la hauteur de l'Etoile Polaire au dessus de l'horizon ; un dispositif rudimentaire, constitué d'un grand rapporteur de tableau peut suffire.



20.2.2 Utilisation du passage du Soleil dans le plan méridien

Il s'agit d'abord de déterminer le plan méridien du lieu, c'est-à-dire le plan vertical qui contient la direction Sud, il passe par le centre de la Terre et contient son axe de rotation ; le méridien terrestre est alors l'intersection de la Terre avec ce plan.

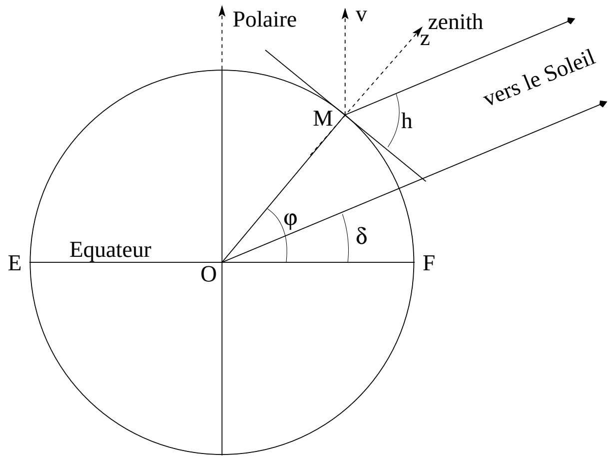
Pour cela on admet que la trajectoire du Soleil dans le ciel entre son lever et son coucher est symétrique par rapport au plan méridien, et que le Soleil culmine chaque jour dans ce plan, on dit qu'il est midi.

On fixe verticalement une tige de hauteur l ; on repère sur un support horizontal, à différents instants d'une même journée, la position de l'extrémité de l'ombre portée de la tige, et on trace la courbe $\mathcal{C}$ décrite par cette extrémité.

Le méridien correspond à l'ombre la plus courte ; il est matérialisé par l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$. On peut l'obtenir en traçant un arc de cercle centré sur le pied de la tige et coupant la courbe $\mathcal{C}$ décrite par l'ombre en deux points A et B.

La médiatrice du segment $[AB]$ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$, elle indique la direction Nord-Sud cherchée.

La figure 20.2.2 représente une coupe de la Terre par le plan méridien du lieu M d'observation, la droite (NS) est l'axe des pôles, (EF) correspond à l'équateur, la droite (Oz) est la verticale du lieu, la tangente (Mw) au cercle est dans le plan horizontal du lieu M, les droites (Os) et (Ms) donnent la direction du Soleil à midi, elles sont parallèles si l'on considère que le Soleil est à l'infini ; pour la même raison les droites (ON) et (MV) qui donnent la direction de l'Etoile Polaire sont parallèles.



L'angle h est la hauteur du Soleil au dessus de l'horizon à l'instant de sa culmination, δ est la hauteur du Soleil au dessus de l'équateur, on l'appelle **déclinaison**, et φ est la latitude de M.

Les angles correspondants $\widehat{MOs}$ et $\widehat{zMs}$ sont égaux et on a

$$\widehat{MOs} = 90 - h.$$

Lorsque δ est positif (au printemps ou en été), on a

$$\varphi = \delta + \widehat{MOs}.$$

La latitude φ est donnée par

$$\varphi = \delta + (90 - h).$$

Cette relation reste vraie lorsque δ est négatif (à l'automne ou en hiver). La formule précédente se simplifie le jour d'un équinoxe puisque on a alors $\delta = 0$.

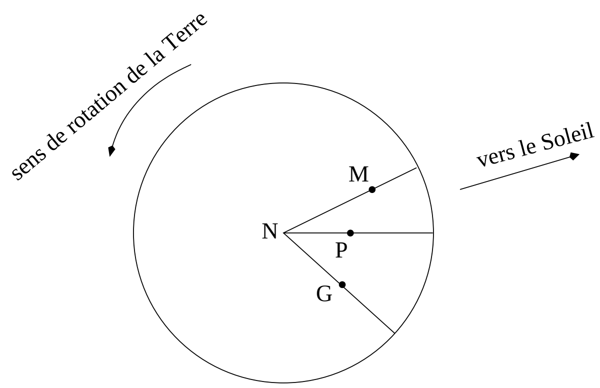
20.3 Mesure de la longitude

Une fois le plan méridien du lieu d'observation déterminé, on note t_1 l'instant du passage du Soleil dans ce plan à une date quelconque.

Il faut encore déterminer l'instant t_2 du passage du Soleil dans le plan du méridien origine à la même date. Comme le mouvement apparent du Soleil au cours de la journée est uniforme, l'instant du passage du Soleil dans le plan méridien en un lieu donné est la demi-somme des heures du lever et du coucher du Soleil .

Si on prend le méridien de Paris pour méridien origine [2] , t_2 est la demi-somme des heures du lever et du coucher du Soleil à Paris et ces heures sont fournies par le calendrier des postes .

En 1 minute la Terre tourne de $\dfrac{360}{24 \times 60} = 0,25$. Pendant l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ exprimé en minutes, la Terre aura tourné de $(t_2 - t_1) \times 0,25$, ce qui représente la longitude du lieu considéré mesurée par rapport au méridien de Paris [3] (Fig. 20.3).



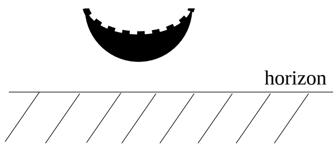
2. C'est en 1884 à la conférence de Washington que le méridien de Greenwich fut adopté comme origine des longitudes mais la France n'adopta cette Convention qu'en 1911 .

3. La longitude de Paris mesurée par rapport au méridien de Greenwich est de 2° 20'14" qu'il suffit d'ajouter au résultat précédent pour obtenir la longitude du lieu d'observation par rapport au méridien de Greenwich

Chapitre 21

Croissant de Lune

On se propose d'établir les conditions pour que le croissant de Lune soit vu d'un lieu de la Terre comme « une gondole » :



21.1 Géométrie du croissant.

De manière intuitive et par la figure ci-dessus, on se rend compte que pour voir le croissant de Lune horizontal il est nécessaire et suffisant que le Soleil éclaire la Lune par « au-dessous », c'est à dire qu'ils aient le même azimut $A_L = A_{\odot}$.

Nous allons montrer cette affirmation.

On supposera pour simplifier le problème que le Soleil est à l'infini. La partie éclairée de la Lune est donc une demi-sphère limitée par le cercle C_T appelé terminateur. Ce que voit en principe l'oeil de l'observateur est une calotte sphérique assez proche d'une demi-sphère elle aussi limitée par un cercle que l'on nomme C_V [1] . Mais il n'y a que la partie éclairée de cette demi-sphère qui est réellement vue, c'est-à-dire l'intersection des deux demi-sphères : un quartier d'orange.

Les bords de ce quartier sont deux demi-grands cercles (de C_T et de C_V). Comme la projection d'un cercle sur un plan est une ellipse, la projection du

1. Voir la fiche « Calotte sphérique / hémisphère »

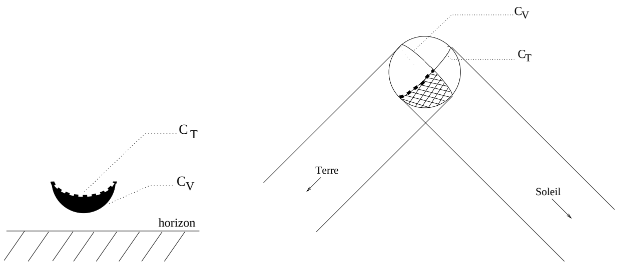


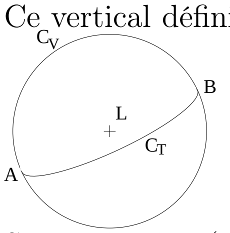
FIGURE 21.1 – Les bords de la Lune.

terminateur C_T sur le plan de visée[2] est vue comme une ellipse. Ainsi, voir la Lune comme une « gondole » revient à ce que le grand axe de cette ellipse soit horizontal.

Question 1) A quelle condition le grand axe de cette ellipse est horizontal ?

On rappelle que la verticale du lieu et la ligne de visée d'un astre définissent un plan appelé « plan vertical » ou « vertical ».

Ce vertical définit l'azimut de cet astre.



La démonstration est très simple si on considère une figure dans le plan de visée.
Soit O l'observateur sur Terre et S le Soleil.

Soit V le plan (diamétral) contenant C_V, $V \perp (OL)$
Soit T le plan (diamétral) contenant C_T, $T \perp (LS)$
Ainsi, $(AB) = V \cap T$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} (AB) \subset V \\ (OL) \perp V \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp (OL) \\ \left.\begin{array}{c} (AB) \subset T \\ (LS) \perp T \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp (LS) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (AB) \perp \text{plan } (OLS)$$

Ceci n'est possible que si O, L et S ne sont pas alignés (c'est à dire en dehors des éclipses).

Puisque la condition est que (AB) soit horizontal alors (OLS) est un vertical, c'est-à-dire que L et S sont dans le même vertical. On peut donc conclure que L et S ont le même azimut.

2. La ligne de visée est la demi-droite qui joint l'oeil de l'observateur au centre de la Lune. Tout plan perpendiculaire à la ligne de visée est appelé plan de visée. Par exemple, pour un appareil photo, la ligne de visée est l'axe de l'objectif et un plan de visée est celui de la pellicule.

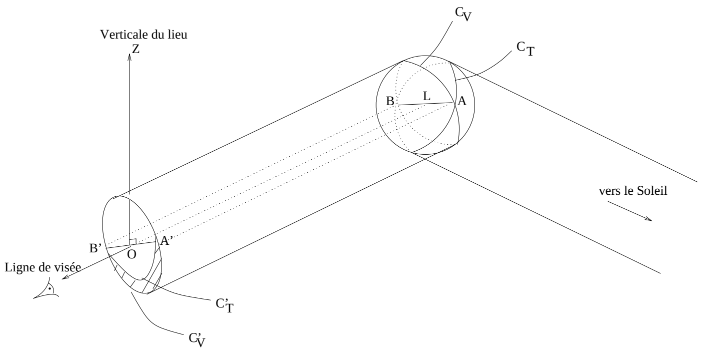


FIGURE 21.2 – Les différents plans de visée.

Ainsi, le Soleil et la Lune ont le même azimut (ou sont différents de $180°$).

Nous donnons ci-dessous, une présentation de la démonstration légèrement différente qui utilise l'image du croissant qui se forme au niveau de l'observateur. De ce fait, la démonstration est plus lourde et peut apparaître plus confuse. Son intérêt est surtout de bien montrer qu'il n'y a pas de différence à utiliser l'image de l'objet (plan de visée au niveau dela rétine de l'oeil ou au niveau de la plaque photographique) que l'objet lui-même.

Cette démonstration peut être omise, au moins en première lecture.

Les notations sont celles de la Figure (21.2) .

$(A'B')$ est la direction horizontale du plan de visée. En tant qu'horizontale, $(A'B')$ est perpendiculaire à la verticale du lieu (OZ). En tant que droite appartenant au plan de visée, $(A'B')$ est perpendiculaire à la ligne de visée (OL).

Comme $(A'B')//(AB)$ et $(AB) \perp (LS)$ donc $(A'B')$ est aussi perpendiculaire à (LS).

On en déduit que $(A'B')$ est perpendiculaire au plan (OLS), c'est à dire que $(OZ) \subset (OLS)$. Ce qui signifie que (OLS) est un vertical.

21.2 Conditions de visibilité

Question 2) Préciser les conditions sur les hauteurs du Soleil et de la Lune pour que le croissant de Lune soit vu comme une « gondole » et non comme un 'D' renversé ?

Tout d'abord, il est préférable que le Soleil soit couché et donc sa hauteur doit être négative. La Lune, quant à elle, doit être levée : sa hauteur est donc positive (Figure 21.3).

Soit h_L la hauteur de la Lune et $h_\odot$ la hauteur du Soleil.

Si $h_\odot = h_L - 90°(< 0)$ l'observateur voit exactement une demi-lune. Ainsi pour avoir l'aspect indiqué sur la figure (un croissant comme une « gondole »),

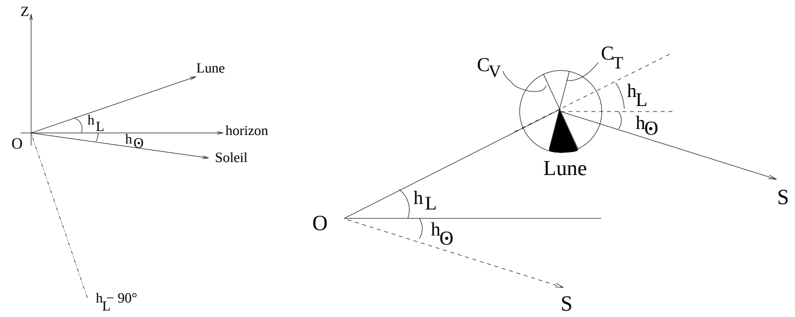


FIGURE 21.3 – Conditions de visibilité.

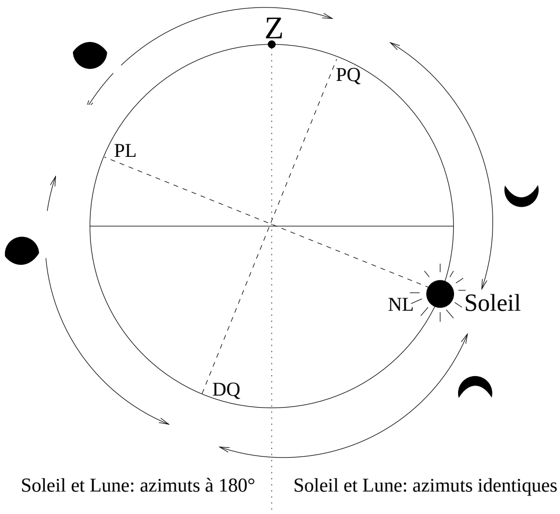


FIGURE 21.4 – Phases de la Lune sous la condition de même azimut. Figure dans le plan vertical de la Lune (et du Soleil).

il est nécessaire d'avoir $h_\odot > h_L - 90°$.

La Figure (21.4) donne, pour chaque position de la Lune sur le même vertical que le Soleil, l'aspect de celle-ci.

La position du zénith sur le cercle est indicatif. Elle correspond au cas de la Figure (21.3). Bien-sur, si le zénith est ailleurs sur le cercle, cela change les conditions de lever/coucher du Soleil et de la Lune.

21.3 Condition d'existence : cas coplanaire

Question 3) En supposant que la Lune est sur l'écliptique, donner les seuls endroits de la Terre où il est possible de voir le croissant de Lune horizontal

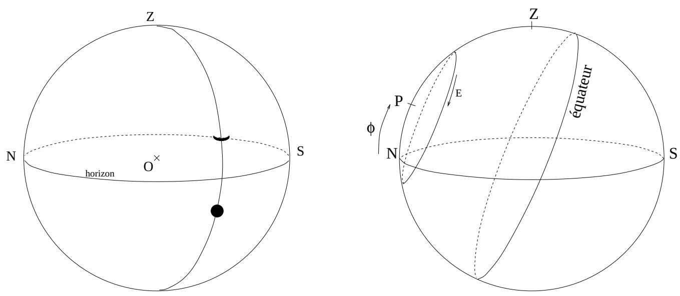


FIGURE 21.5 – Cas de la Lune sur l'écliptique.

On sait qu'il n'y a qu'un seul grand cercle passant par deux points de la sphère céleste. Or, la Lune et le Soleil sont sur un même grand cercle (écliptique), et puisque $A_L = A_\odot$, les grands cercles ZL et $Z\odot$ sont les mêmes. Ainsi le zénith Z est sur l'écliptique. Or,

$$\text{« } Z \text{ est sur l'écliptique »} \equiv \text{« } ZE = 90° \text{ »} \equiv \text{« } E \text{ est sur l'horizon »}$$

où E est le pôle de l'écliptique. E est un point de la sphère des fixes. A ce titre, et comme toutes les étoiles, il est affecté par le mouvement diurne. E tourne autour du pôle céleste nord P à la distance angulaire $\omega = 23°26'$ (**obliquité**) .

On voit que pour une latitude comme celle de Lille ($\varphi = 50°$), cela est impossible. Ce n'est possible que si

$$|\varphi| \leq 23°26'$$

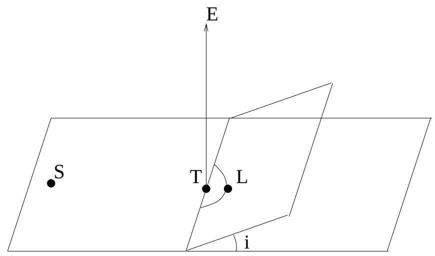
c'est à dire, entre les tropiques. En ces lieux, la condition est réalisée 2 fois par jour[3].

21.4 Condition d'existence : cas non coplanaire

Question 4) On considère dans cette question que l'orbite de la Lune autour de la Terre est écartée de l'écliptique d'une valeur i non nulle ($i \approx 5°$). Chercher alors une autre condition pour que la Lune et le Soleil aient le même azimut.

Une condition suffisante est donnée par la figure suivante :

3. Il reste alors à regarder les conditions de lever et de coucher. Par exemple : à l'heure où E est sur l'horizon (2 cas), on trace l'écliptique sur la Figure (21.5) (elle passe par le zénith). Les conditions de lever/coucher du Soleil dépendent de la date. Les conditions de lever/coucher de la Lune dépendent dépendent aussi de la date mais dans la lunaison selon la Figure (21.4)



C'est à dire le plan (STL) est perpendiculaire à l'écliptique. Cette condition est indépendante du lieu.

(STL) définit un plan. Ce plan coupe la Terre suivant un grand cercle. Or, durant la lunaison, ce plan tourne complètement. Ainsi tous les lieux de la Terre sont concernés.

2 fois par mois

En fait cette situation correspond à une pleine Lune (ou une nouvelle Lune si celle-ci était de l'autre coté). Le « croissant » de Lune est bien horizontal mais cela n'est guère perceptible à l'oeil. D'ailleurs si $i = 0$, ce serait une situation d'éclipse (la Lune dans l'écliptique). Donc une situation de pleine Lune stricte n'existe pas.

21.5 Le zénith sur la sphère des fixes

Il est peut-être plus facile de voir les 2 cas (coplanaire et non-coplanaire) en raisonnant sur la sphère des fixes. Pour la Figure (21.5), on regardait le mouvement diurne d'un point de la sphère des fixes (le pôle E de l'écliptique) sur la sphère locale (de pôle Z). Dans cette section, nous allons faire la démarche réciproque : on regarde le mouvement diurne de Z sur la sphère des fixes. On utilise la condition suivante :

$$L \in \quad \text{grand cercle} \quad (ZS) \quad \text{(vertical du Soleil)}$$

En effet, nous avons vu que c'est la condition pour voir la Lune comme une « gondole » (ou tout au moins, la Lune à l'horizontal).

Figure (21.6) :

Sur une sphère des fixes où on a placé l'équateur, l'écliptique et leurs pôles, et pour une latitude φ donnée, on trace le petit cercle correspondant aux positions prises par le zénith au cours du mouvement diurne (« petit cercle des Z »). On positionne aussi (à une date donnée) le Soleil sur l'écliptique. A

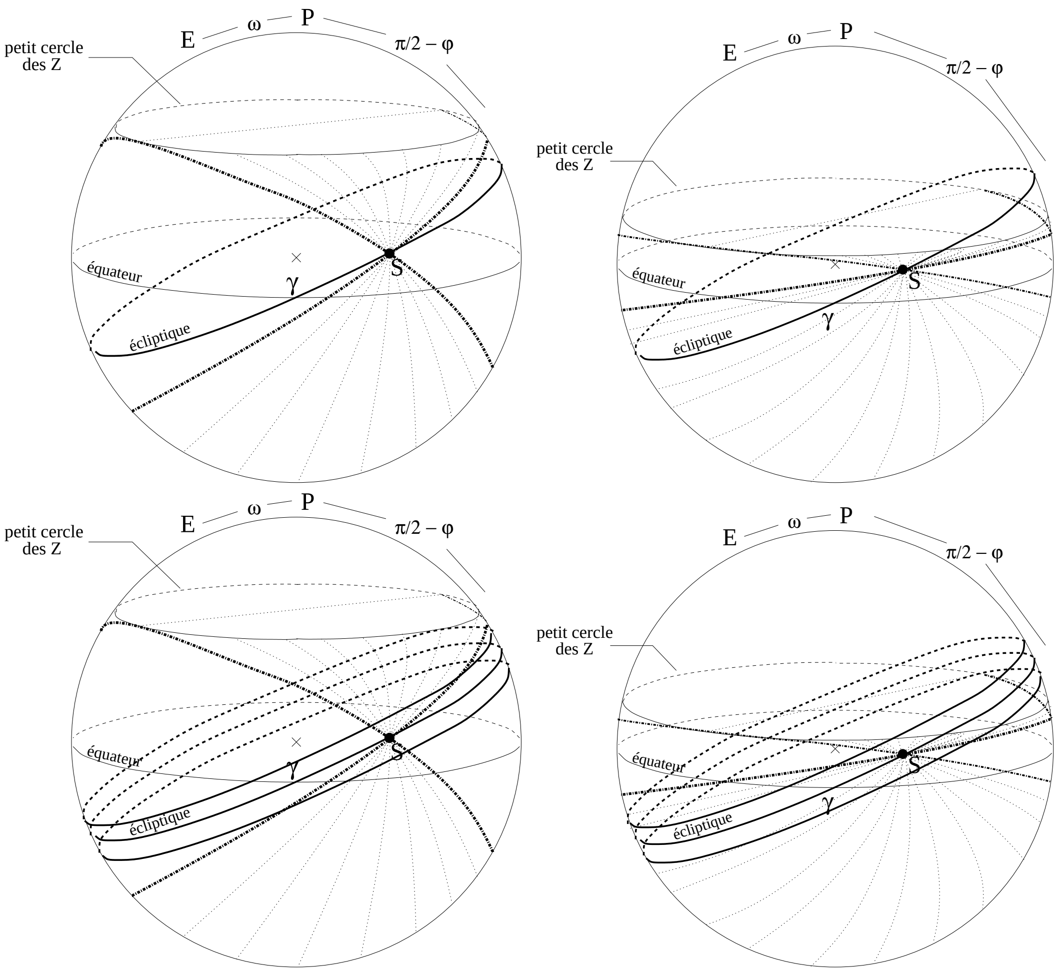


FIGURE 21.6 – Petit cercle des zéniths sur la sphère des fixes durant le mouvement diurne. Cas d'une zone tempérée (à gauche) et d'une zone intertropicale (à droite). Cas de la Lune sur l'écliptique (en haut) et cas de la Lune de part et d'autre de l'écliptique à 5° au plus (en bas)

chacune de ces positions de Z, il correspond un seul grand cercle passant par le Soleil : c'est le vertical du Soleil. On obtient ainsi un faisceau de grands cercles dont les sommets sont le Soleil et le point diamétralement opposé. Sur la Figure (21.6), pour ne pas encombrer celle-ci, nous en avons tracé qu'une partie puisque qu'on les a arrétés au niveau du petit cercle des Z. En réalité, ces grands cercles sont bien complets de sorte que toute la calotte sphérique se situant au dessus[4] du petit cercle des Z est parcouru par ces grands cercles. Ainsi la sphère est divisée en deux parties : celle contenant chaque vertical du Soleil et l'autre.

La Lune doit se trouver dans la première partie (les « faisceaux » de la Figure (21.6)).

La frontière entre ces deux parties correspond au vertical du Soleil qui est tangent au petit cercle des Z.

Cas de la Lune sur l'écliptique

Ce cas correspond aux 2 dessins du haut de la Figure (21.6). En dehors de la zone intertropicale (à gauche), l'écliptique coupe « les faisceaux » qu'en ses sommets : au Soleil et au point diamétralement opposé. Si on impose à la Lune d'être sur l'écliptique, il n'y a qu'en ses points que la condition est réalisée (éclipses). Par contre, dans la zone intertropicale, tout l'écliptique est contenu dans « les faisceaux ». Ainsi la condition est réalisée deux fois par jour comme on l'a vu dans précédemment.

Cas où la Lune est de part et d'autre de l'écliptique

L'orbite de la Lune est inclinée d'environ 5° sur l'écliptique. Son noeud qui permettrait de positionner le grand cercle correspondant à son orbite, a un mouvement de rétrograde de $-19°, 34/\text{an}$ (période : 18,6 ans). Pour ne pas rentrer dans trop de détails superflus à la compréhension, nous allons simplement considérer que la Lune est de part et d'autre de l'écliptique sur une bande large de 10°. Bien-sur, il ne faut pas oublier que la Lune parcourt en fait un grand cercle contenu dans cette bande : la position en longitude dans cette bande dépend de la date dans la lunaison et la position « verticale » dans cette bande dépend de la position du noeud de l'orbite lunaire.

On remarque ainsi qu'au voisinage de la pleine Lune ou au voisinage de la nouvelle Lune, la condition de « Lune horizontale » est possible partout sur la Terre (comme cela a été vu en Sect. (21.4)). Mais on se rend bien compte

4. Ou au-dessous, pour une figure faite avec le Soleil au dessus du cercle des Z (cas intertropical seulement)

que la zone est étroite. Elle s'agrandit au fur et à mesure que le lieu considéré s'approche du tropique.

Dans le cas d'un lieu dans la zone intertropicale, la possibilité d'une telle condition est grande. La probabilité de réalisation l'est donc aussi. Cependant cette probabilité n'est pas 1, car on voit apparaitre une petite zone de la bande lunaire qui croise la partie où il n'y a pas de vertical du Soleil (en dehors des « faisceaux »). Cette zone est petite et proche du Soleil. Ainsi même dans la zone intertropicale, il peut y avoir des jours où la Lune n'est pas vue à l'horizontal. Cela se produit pour des positions particulières de l'orbite lunaire et pour des dates proches de la pleine Lune ou de la nouvelle Lune.

21.6 Extensions possibles

- Déplacer le Soleil sur l'écliptique. Cela revient à considérer d'autres dates. Celle de la Figure (21.6) correspond au milieu du printemps.
- Regarder ce qui se passe lorsque le Soleil est sur le petit cercle des Z. Cela n'est possible que dans la zone intertropicale.
- Regarder ce qui se passe lorsqu'on est sur l'équateur terrestre.
- Se placer dans l'hémisphère austral ($\varphi < 0$).
- Pour une époque donnée, donc pour une longitude du noeud de l'orbite lunaire donnée, placer le grand cercle de l'orbite de la Lune.
- Sur la Figure (21.5), on suppose que la Lune est sur * l'écliptique. Or l'écliptique est utile dans le raisonnement pour la seule raison que c'est un grand cercle. Considérer F le pôle du grand cercle (LS) (qui n'est plus obligatoirement l'écliptique) et refaire la Figure (21.5) avec F au lieu de E.
- Comment évolue F suivant la lunaison, la date ....
- Etudier l'ouverture du faisceau de vertical. Il s'agit donc de positionner exactement le vertical tangent. Etudier sa dépendance par rapport aux angles utilisés (ω, φ, $l_\odot$, ...).
- Etude de l'occurence du phénomène et l'analogie avec les éclipses.
- ...