Université de Lille
IREM
S.R. - 27 juin 2018

Détermination observationnelle de l'équation du temps (réponses)

1) La déclinaison est donnée par la mesure de la hauteur du Soleil lors de son passage au méridien. D'après la figure 1 : $h_\odot = \frac{\pi}{2} - \phi + \delta_\odot$.

La mesure de la hauteur peut être réalisée à l'aide d'un gnomon, cf. figure 2.

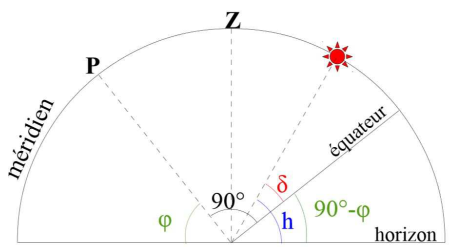


FIGURE 1 – déclinaison, hauteur maximale et latitude du lieu.

2) Pour trouver l'obliquité ϵ, on mesure la hauteur du Soleil lors de son passage au méridien, le jour du solstice d'été puis du solstice d'hiver. La différence angulaire obtenue est alors 2ϵ.

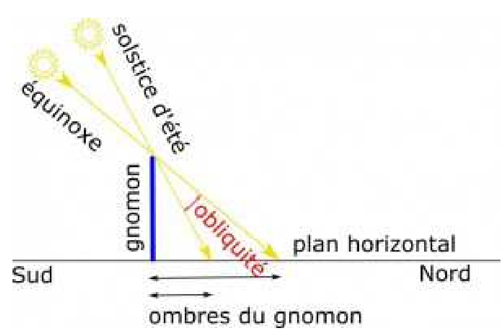


FIGURE 2 – L'obliquité est la différence entre la hauteur maximale du Soleil au solstice et à l'équinoxe.

En notant $h_\odot$ la hauteur du Soleil, on a : $\tan(\frac{\pi}{2} - h_\odot) = \frac{\text{longueur de l'ombre}}{\text{longueur du gnomon}}$.

3) Démonstration du théorème des trois perpendiculaires :

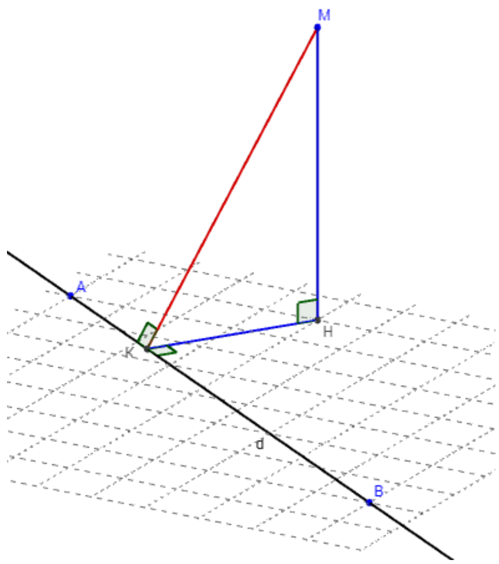
a) par le produit scalaire : soit $\mathbf{u}$ un vecteur directeur de (d). Alors $\mathbf{MK}.\mathbf{u} = (\mathbf{MH} + \mathbf{HK}).\mathbf{u} = 0$.

b) (MH) est orthogonale à (d) car orthogonale au plan P qui contient (d).

(HK) et (d) sont perpendiculaires par définition de K.

Donc le plan défini par les points M, H, K est orthogonal à (d) car il contient deux droites sécantes orthogonales à (d).

(d) est orthogonale à toute droite du plan (MHK), en particulier (MK).



4) Figure 2 : I est le projeté orthogonal de S sur $(O\gamma S')$, J le projeté orthogonal de I sur $(O\gamma)$, alors J est le projeté orthogonal de S sur (Oγ).

5) Triangle OJS rectangle en J :

$$\sin l_\odot = \frac{JS}{OS}$$

Triangle OIS rectangle en I :

$$\sin \delta_\odot = \frac{IS}{OS}$$

Triangle SIJ rectangle en I :

$$\sin \epsilon = \frac{IS}{JS}$$

Donc :

$$\sin \delta_\odot = \frac{IS}{OS} = \frac{IS}{JS}\frac{JS}{OS} = \sin \epsilon \sin l_\odot$$

6) La relation (1) donne $l_\odot = 282.0°$ le 2 janvier et $l_\odot = 13.68°$ le 3 avril, soit $\Delta l_\odot = 91.68°$ entre les deux dates.

Par ailleurs, il s'est écoulé 91.04 jours entre les deux instants. En supposant un mouvement uniforme sur l'écliptique, on aurait $\Delta l_\odot = 91.04 \times \dfrac{360}{365.25} = 89.73°$.

7) L'écart mesuré par rapport au mouvement uniforme est alors : $91.68 - 89.73 \simeq 1.9°$.

8) Maximum 3 avril, minimum 1er octobre, valeur nulle 2 janvier et 2 juillet.

9) Triangle OJI rectangle en J :

$$\tan \alpha_\odot = \frac{IJ}{OJ}$$

Triangle OJS rectangle en J :

$$\tan l_\odot = \frac{JS}{OJ}$$

Triangle SIJ rectangle en I :

$$\cos \epsilon = \frac{IJ}{JS}$$

Donc :

$$\tan \alpha_\odot = \tan l_\odot \cos \epsilon.$$

10) On a successivement :

$$\tan \alpha_\odot = \tan l_\odot \cos \epsilon,$$

$$\tan \alpha_\odot = \tan l_\odot \frac{1 - \tan^2(\epsilon/2)}{1 + \tan^2(\epsilon/2)},$$

$$\tan \alpha_\odot (1 + \tan^2(\epsilon/2)) = \tan l_\odot (1 - \tan^2(\epsilon/2)),$$

$$\tan \alpha_\odot - \tan l_\odot = -\tan^2(\epsilon/2)(\tan \alpha_\odot + \tan l_\odot),$$

$$\frac{\sin \alpha_\odot \cos l_\odot - \sin l_\odot \cos \alpha_\odot}{\cos \alpha_\odot \cos l_\odot} = -\tan^2(\epsilon/2) \frac{\sin \alpha_\odot \cos l_\odot + \sin l_\odot \cos \alpha_\odot}{\cos \alpha_\odot \cos l_\odot},$$

$$\sin(\alpha_\odot - l_\odot) = -\tan^2(\epsilon/2) \sin(\alpha_\odot + l_\odot).$$

11) $\tan^2(\epsilon/2) \simeq 0.0431$, donc $|\sin(\alpha_\odot - l_\odot)| \leq 0.0431$, d'où l'approximation :

$$\sin(\alpha_\odot - l_\odot) \simeq \alpha_\odot - l_\odot.$$

12) $\alpha_\odot - l_\odot = -0.0431 \sin(\alpha_\odot + l_\odot) = -2.5° \sin(\alpha_\odot + l_\odot)$.
D'autre part :

$$\sin(\alpha_\odot + l_\odot) = \sin(\alpha_\odot - l_\odot + 2l_\odot) = \sin(\alpha_\odot - l_\odot)\cos(2l_\odot) + \cos(\alpha_\odot - l_\odot)\sin(2l_\odot),$$

avec $\alpha_\odot - l_\odot << 1$. Donc $\sin(\alpha_\odot + l_\odot) \simeq \sin(2l_\odot)$ et on en déduit :

$$\alpha_\odot \simeq l_\odot - 2.5^\circ \sin(2l_\odot).$$

13) La courbe verte s'annule aux équinoxes, approximativement les 21 mars ($l_\odot = 0$) et 21 septembre ($l_\odot = 180^\circ$), ainsi qu'aux solstices les 21 juin ($l_\odot = 90^\circ$) et 21 décembre ($l_\odot = 270^\circ$).

Elle est maximale début février ($l_\odot = -45^\circ$) et début août ($l_\odot = 135^\circ$), et minimale début mai ($l_\odot = 45^\circ$) et début novembre ($l_\odot = 225^\circ$).

14) L'équation du temps est la somme des courbes bleue et verte.

15) D'après (7) l'équation du temps, notée E, est donc simplement :

$$E = \alpha_\odot - \alpha_m,$$

où α_m est l'ascension droite du soleil moyen (de variation uniforme).

Puisque l'ascension droite est croissante vers l'est, $E > 0$ ($\alpha_\odot > \alpha_m$) signifie que le soleil est plus à l'est que le soleil moyen. Il passe donc au méridien après le soleil moyen : on dit qu'il est en retard.

En revanche l'angle horaire croît vers l'ouest, dans le sens du mouvement diurne. On a en fait la relation $H_\odot = H_\gamma - \alpha_\odot$, où H_γ est le temps sidéral, et donc :

$$E = H_m - H_\odot,$$

en notant H_m l'angle horaire du soleil moyen.

On retrouve la remarque précédente en raisonnant sur l'angle horaire : le Soleil est en retard par rapport au soleil moyen ($H_\odot < H_m$) lorsque $E > 0$.

La connaissance de l'équation du temps donne ainsi le moyen de corriger à tout instant l'heure donnée par un cadran solaire ($H_\odot$) pour trouver l'heure légale, définie à partir de H_m et d'écoulement uniforme.