TD n^{o}3 : lois de Kepler

Exercice 1 : *Excentricité de la Terre* Lorsque la Terre se trouve à son périhélie, le diamètre apparent du Soleil, est de $\alpha_p = 32'32"$, et lorsqu'elle se trouve à son aphélie il est de $\alpha_a = 31'28"$. Soit d_p et d_a les distances entre le Soleil et la Terre lorsque la Terre se trouve au périhélie et à l'aphélie respectivement et D le diamètre réel du Soleil.

1. Exprimer α_p et α_a en fonction de d_p, d_a et D, puis $\beta = \alpha_p/\alpha_a$ en fonction de d_p et d_a.
2. Soit a le demi-grand axe de l'orbite terrestre et e son excentricité. Exprimer d_p et d_a en fonction de a et e.
3. En déduire e en fonction de β. Calculer e numériquement.

Exercice 2 : *constante universelle de la gravitation* En négligeant la masse de la Terre devant celle du Soleil, calculer la valeur de la constante universelle de la gravitation dans les unités masse solaire, unité astronomique et année (où l'année correspond à la période orbitale de la Terre).

Exercice 3 : *Masse du Soleil*

1. On suppose la Terre sur une orbite circulaire centrée sur le Soleil. Le rayon de l'orbite étant $a = 149,6 \times 10^6$ km et la période orbitale de 365,25 j , en déduire la somme des masses $M_\odot + m_\oplus$ du Soleil ($M_\odot$) et de la Terre ($m_\oplus$). On donne la constante universelle de la gravité $G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.
2. On suppose maintenant que la Lune est sur une orbite circulaire centrée sur la Terre. Le rayon de l'orbite lunaire est $a_l = 384\,400$ km et sa période de 27,322 j. En déduire la somme de masse $m_\oplus + m_l$ où m_l est la masse de la Lune.
3. En déduire un encadrement de la masse du Soleil puis une valeur de la masse du Soleil à 10^{-5} près en valeur relative.

Exercice 4 : *Masse de la Galaxie* Des observations radio permettent de détecter le mouvement d'un nuage de gaz tournant autour de la Galaxie à une distance de 100 000 al à une vitesse de 270 km/s. En supposant la trajectoire du nuage comme circulaire uniforme et en négligeant la masse du nuage devant celle de la Galaxie, calculer la masse de la Galaxie se trouvant à l'intérieur de la sphère de rayon 100 000 al.

Exercice 5 : *Sirius A et Sirius B* L'étoile Sirius est en fait une étoile double : Sirius A et Sirius B, c'est-à-dire qu'elles sont reliées gravitationnellement et qu'elles tournent autour de leur centre de masse. La parallaxe du couple est de $\varpi = 0"377$ et leur séparation angulaire de $\alpha = 7"5$.

1. Calculer, en unité astronomique, la distance séparant Sirius A et Sirius B au moment de l'observation.
2. On suppose que la séparation entre Sirius A et Sirius B est constante et que leur orbite se trouve dans le plan perpendiculaire à la ligne d'observation. On suppose aussi pour simplifier que seule Sirius B est en mouvement circulaire uniforme autour de Sirius A (supposée fixe). Sachant que la période du mouvement de Sirius A et Sirius B est de 49,9 ans, calculer la somme des masses de Sirius A et Sirius B en masse solaire.
3. En fait Sirius A et Sirius B tournent autour de leur centre de masse. On suppose leur mouvement uniforme et circulaire de rayon respectif r_A et r_B. Un observation précise de leur mouvement permet de voir que $r_B/r_A = 2,44$. En utilisant la définition du centre de masse en déduire que $M_A/M_B = 2,44$.
4. Calculer les masses de Sirius A et Sirius B en masse solaire.

Exercice 6 : *Satellite artificiel de la Terre*

1. Calculer la période T d'un satellite artificielle autour de la Terre en fonction de l'altitude h du satellite (supposée constante), de la masse de la Terre $m_\oplus$, du rayon terrestre $r_\oplus$ et de la constante universelle de la gravitation G. On considérera que le satellite est de masse négligeable par rapport à celle de la Terre.
2. On veut que la période du satellite soit une fraction entière de la période de la rotation de la Terre sur elle-même, c'est-à-dire que $T = T_\oplus/n$ où $T_\oplus$ est la période de rotation de la Terre sur elle-même. Calculer n en fonction de h, $m_\oplus$, $r_\oplus$, $T_\oplus$ et G.
3. Quelle est la valeur maximale de n pour que h soit supérieure à 400 km (le satellite doit être au-dessus de l'atmosphère terrestre). On donne $T_\oplus = 23$ h 56 mn 06 s, $m_\oplus = 5.9736 \times 10^{24}$ kg, $r_\oplus = 6\,378$ km et $G = 6.672 \times\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.