TD n^{o}2 : Calcul de la vitesse de la lumière par un effet Doppler-Fizeau

Le but de cet exercice est de calculer la vitesse de la lumière en considérant un phénomène mettant en scène un satellite de Jupiter. Pour cela on va ramener ce phénomène à un effet Doppler-Fizeau. Cet effet correspond à un décalage entre la période mesurée à la source d'un phénomène périodique et la mesure de cette période faite par un observateur qui est en déplacement par rapport à la source.

Jupiter possède 4 gros satellites appelés les Galiléens, observés pour la première fois par Galilée en 1609. Le satellite le plus proche de Jupiter s'appelle Io et sa période orbitale autour de Jupiter est de 42 h 27 mn 21,6 s. Lors de son mouvement autour de Jupiter, Io va régulièrement passer dans le cône d'ombre de Jupiter, il s'agit donc d'une éclipse. On parle de commencement de l'éclipse lorsque Io rentre dans le cône d'ombre et de fin de l'éclipse lorsque Io sort du cône d'ombre. Depuis la Terre, lors d'un passage de Io dans le cône d'ombre, seulement le commencement ou la fin d'une éclipse est visible selon les positions relatives de Jupiter et de la Terre (voir la figure 1).

Un commencement (resp. une fin) d'éclipse est donc un phénomène visuel qui a lieu à un instant donné. Si on considère la vitesse de la lumière comme étant infinie, l'instant auquel le phénomène se passe et l'instant auquel il est observé depuis la Terre sont identiques. Donc l'intervalle de temps qui sépare deux commencements (resp. fins) successives, que l'on peut appeler la période *effective* du phénomène Δ_{eff}, et l'intervalle de temps qui sépare l'observation depuis la Terre de ces évènements, appelée la période *observée* Δ_{obs}, sont égales.

Or, en 1676, l'astronome danois Ole Rømer, montre qu'un commencement d'éclipse de Io va être observé avec retard par rapport à l'instant prévu par les tables astronomiques de l'époque. L'explication que Rømer donne à ce retard est que la vitesse de la lumière est finie.

En se basant sur cette hypothèse nous allons estimer la vitesse de la lumière. Dans un premier temps on établira la formule reliant Δ_{obs} et Δ_{eff} dans un cadre général, pour se consacrer ensuite à son application dans le cas des éclipses de Io.

Considérons 2 commencements successifs. Soit x_1 la distance qui sépare Jupiter de la Terre [1] lors de l'observation du premier commencement à l'instant t_1, et x_2 la distance séparant la Terre de Jupiter lors de l'observation du deuxième commencement à l'instant t_2. On a donc $\Delta_{\text{obs}} = t_2 - t_1$.

1. On néglige ici la distance entre Io et Jupiter (de l'ordre de 420 000 km) par rapport à la distance Terre Jupiter qui est de l'ordre de plusieurs centaines de million de kilomètres.

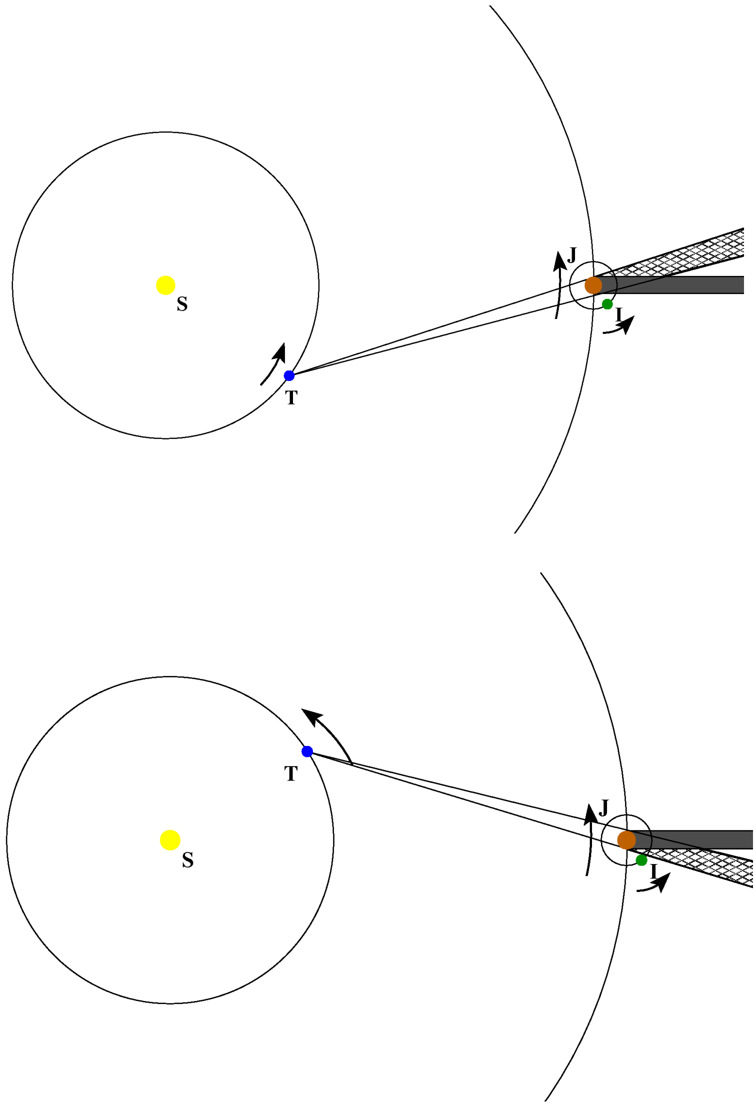

FIGURE 1 – Positions relatives du Soleil (S), de la Terre (T), de Jupiter (J) et de Io (I) à la fin et au commencement d'une éclipse de Io (le cône d'ombre de Jupiter correspondant à l'aire grise). La partie noire n'est pas visible depuis la Terre. Ainsi on voit que lorsque que la Terre se rapproche de Jupiter, seul le commencement est visible (figure du haut) alors que lorsque la Terre s'éloigne de Jupiter seule la fin est visible (figure du bas). Attention les distances ne sont pas à l'échelle sinon Io aurait été confondu avec le point représentant Jupiter.

1. Soit τ_1 l'instant auquel le premier commencement a effectivement eu lieu. Déterminer t_1 en fonction de τ_1, x_1 et la vitesse de la lumière notée c.
2. Soit τ_2 l'instant auquel le deuxième commencement a effectivement eu lieu. Déterminer t_2 en fonction de τ_2, x_2 et c.
3. En déduire une relation entre Δ_{obs}, Δ_{eff}, $x_2 - x_1$ et c.
4. On appelle vitesse radiale entre deux corps, la variation par rapport au temps de leur distance. Quelle est la vitesse radiale moyenne v_r entre Jupiter et la Terre entre les instants t_1 et t_2 ?
5. En déduire une relation entre Δ_{obs}, Δ_{eff}, v_r et c.
6. En déduire Δ_{obs} en fonction de Δ_{eff}, v_r et c.
7. En utilisant le développement limité de $1/(1-x)$ en zéro et à l'ordre 1, simplifier l'expression obtenue.

   Remarque :Cette solution est la formule utilisée habituellement pour l'effet Doppler-Fizeau concernant les longueurs d'ondes lumineuses où Δ_{obs} *et* Δ_{eff} *sont remplacées par les longueurs d'onde observée* λ_{obs} *et émise* λ_{eff}*. Par exemple, si un astre émet uniquement de la lumière verte correspondant à la longueur d'onde* λ_{eff}*, alors on peut considérer que cette émission correspond à un phénomène périodique de période* λ_{eff}*. La longueur d'onde perçue sera alors la longueur d'onde* λ_{obs} *donnée par :*

   $$\lambda_{\text{obs}} \approx \lambda_{\text{eff}} \left(1 + \frac{v_r}{c}\right).$$

8. L'application directe de cette formule pose un problème. Avant tout la période Δ_{eff}, qui correspond à la période de Io autour de Jupiter dans un repère centré sur le Soleil mais dont les axes tournent avec la planète, n'est pas connue [2] ; et ensuite la différence entre Δ_{eff} et Δ_{obs} est très petite nécessitant une grande précision dans les observations.

   Pour Δ_{eff}, on considère deux mesures différentes de Δ_{obs}, notées Δ'_{obs} et Δ''_{obs}, pour lesquelles les vitesses radiale v'_r et v''_r sont de signe opposé mais de même valeur absolue.

   Déterminer alors Δ_{eff} en fonction de Δ'_{obs} et Δ''_{obs}.
9. Les époques idéales pour déterminer Δ'_{obs} et Δ''_{obs} sont lorsque la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil est dirigée vers Jupiter ou à l'opposé de Jupiter. Pour cela, en supposant la trajectoire de la Terre

2. En fait elle l'est, mais son calcul fait appel à des modèles dynamiques complexes. On veut ici la déterminer de manière simple.

comme circulaire et uniforme, on voit qu'il suffit que l'angle entre la direction dans laquelle est observé le Soleil et celle dans laquelle est observée Jupiter soit égal à 90°. Ces positions correspondent à des quadratures (voir Fig. 2).

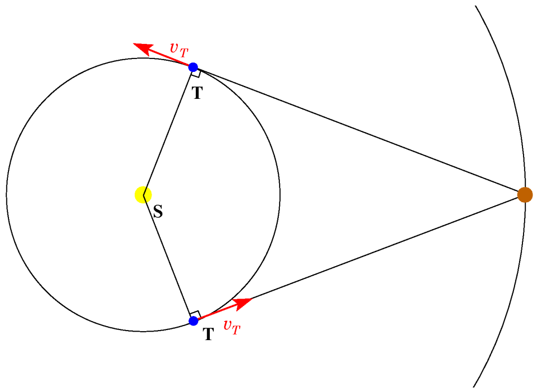

FIGURE 2 – Positions relatives de la Terre et de Jupiter lors des deux quadratures. La vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil v_T est dirigée dans la direction opposée à celle de Jupiter pour la quadrature du 17 Décembre 2010 (en haut) et dans la direction de Jupiter pour celle du 28 Juillet 2011 (en bas). On a donc, pour les vitesses radiales : $v_r' = -v_r" = v_T$.

Fin 2010, une quadrature avec la Terre s'éloignant de Jupiter a eu lieu le 17 décembre 2010, la quadrature suivante avec la Terre qui se rapproche de Jupiter a eu lieu le 28 Juillet 2011. Vers le 17 décembre, d'après les éphémérides de l'IMCCE, deux fins successives d'éclipse de Io ont pu être observés à Lille. La première à 1 h 45,0 mn (en temps terrestre) le 18/12/2010 et la deuxième à 20 h 13,8 mn le 19 Décembre 2010. Vers le 28 Juillet, deux commencements successifs d'éclipse de Io ont pu être observés : le premier à 5 h 26,1 mn le 27 Juillet 2011 et le deuxième à 23 h 54,7 mn le 28 Juillet 2011.

En déduire Δ_{eff} en jours.

10. Pour le problème sur la précision des mesures, on peut considérer non pas deux commencements successifs mais un intervalle de temps séparant deux commencements et ne contenant que des commencements d'éclipse. En effet, comme on ne considère que des commencements, la distance entre la Terre et Jupiter ne cesse de diminuer, ainsi éclipse après éclipse, l'observation de chaque commencement va se faire avec une avance qui va grandissante sur ce qui est prévu. Cette avance sera maximale pour le dernier commencement d'éclipse observé.

    En 2011, le premier commencement d'éclipse observable depuis Lille a eu lieu le 19 Mai 2011 à 4 h 50.1 mn (temps terrestre) et le dernier commencement observable, avec uniquement des observations de commencement d'éclipse pendant cette période, a eu lieu le 21 Octobre 2011 à 22 h 46,0 mn. La Figure 3 montre les positions relatives de Jupiter et de la Terre aux 2 époques.

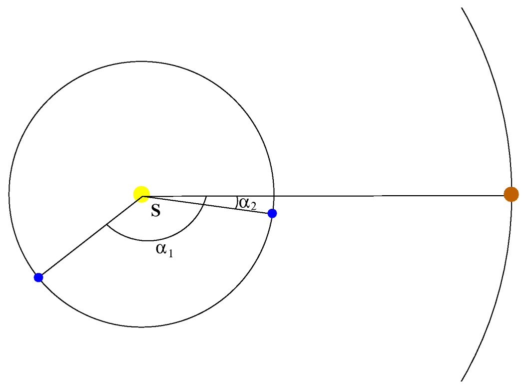

FIGURE 3 – Positions relatives de la Terre et de Jupiter lors de l'observation des deux commencements d'éclipse (non successives) de Io. Celle du 19 Mai 2011 est telle que l'angle entre le direction Soleil-Terre et Soleil-Jupiter est égal à $\alpha_1 = 142°28'25''$ (à gauche) et celle du 21 Octobre 2011 est telle que l'angle entre le direction Soleil-Terre et Soleil-Jupiter est égal à $\alpha_2 = 6°26'38''$.

Calculer la période de temps ΔT écoulée entre ces deux commencements. Combien de périodes a fait Io autour de Jupiter entre ces deux commencements ? En déduire la différence entre la date à laquelle le dernier commencement a été observé et celle à laquelle il aurait été prévu ?

11. L'angle entre la direction Soleil-Terre et la direction Soleil-Jupiter à ces deux époques étaient [3] : $\alpha_1 = 142°28'25''$ pour le 19 Mai 2011 et $\alpha_2 = 6°26'38''$ pour le 21 Octobre. Sachant que le rayon de l'orbite de la Terre est $a_T \approx 150\,000\,000$ km et celui de l'orbite de Jupiter est $a_J \approx 778\,000\,000$ km, calculer les valeurs de x_1 et x_2 correspondant à la distance entre la Terre et Jupiter à ces deux époques.

3. Cet angle correspond à une différence entre les longitudes héliocentriques de Jupiter et de la Terre aux époques données. Mais l'instant de mesure des longitudes est différents puisque pour Jupiter il correspond à l'émission de la lumière alors que pour la Terre il correspond à la réception de ce signal. L'intervalle de temps séparant les deux étant au maximum de 30 mn la Terre aura parcouru au maximum 40 000 km ce qui correspond à un temps de parcours inférieur à la seconde pour un signal allant à la vitesse de la lumière. Cette erreur est négligeable comme on le verra par la suite.

12. En utilisant le résultat de la question 3) et en considérant les 88 éclipses consécutives de Io, exprimer la vitesse de la lumière c en fonction de $x_2 - x_1$ et $\Delta P - 88 \cdot \Delta_{\text{eff}}$. Calculer c.

On trouve une vitesse de la lumière avec une erreur de 56%, ce qui est considérable. Mais l'ordre de grandeur est correct alors qu'on a utilisé finalement très peu de données. D'autre part, il faut dire que le but de Rømer était de montrer la finitude de la vitesse de la lumière et non sa valeur.

Les problèmes rencontrés ici sont avant tout dans le calcul de Δ_{eff}. Il reste très approximatif et une erreur de 1 s sur sa détermination change significativement les résultats (de l'ordre de 16%). Deux problèmes sont présents pour cette détermination (i) Io n'est pas ponctuelle et le temps écoulé entre le début de l'entrée dans l'ombre et la fin de l'entrée dans l'ombre est de l'ordre de 3 mn, si on prend comme date du commencement l'instant ou la moitié de Io est dans l'ombre (le flux lumineux est divisé par deux) alors on n'arrive à la déterminer qu'à 1/10ème de minute près (6 s) ; et (ii) en considérant l'ombre de Jupiter comme un disque traversé par Io, le passage de Io au travers du disque ne se fait pas toujours sur un diamètre du disque, il peut aussi se faire sur une corde plus courte que le diamètre. Dans ce cas, un commencement peut être retardé et une fin avancée.

Une autre source d'erreur : on a supposé ici que toutes les trajectoires étaient circulaire et uniformes, alors que toutes sont elliptique. Ceci entraine des différences dans les vitesses de rotation et donc dans les valeurs de Δ_{eff} mais aussi dans les calculs de x_1 et x_2.

Rømer avait une estimation de Δ_{eff} et Δ_{obs} plus précise que la notre ici puisque son calcul utilisait un grand nombre d'éclipses. Pourtant, à son époque, une autre incertitude existait sur la distance Terre-Soleil et Jupiter-Soleil. En fait Rømer, qui ne voulait que montrer la finitude de la vitesse, établi qu'il fallait 22 minutes à la lumière pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre, puis en utilisant d'autres données il obtint un temps de parcours égal 14 mn. Sachant que le temps de parcours est de 16 mn 18s, son erreur est entre 12 et 25%. Ceci montre surtout la variabilité du résultat par rapport aux données utilisées. Plus tard, au début du XIX siècle, en analysant un millier d'éclipses réparties sur 140 ans, Delambre obtint un temps de parcours égal à 16 mn 26s, ce qui correspond finalement à une valeur remarquablement proche de la réalité.

Avant ça, une détermination de la vitesse de la lumière est due à James Bradley : en 1727, étudiant les variations de déclinaison de l'étoile Gamma du Dragon, il découvre le phénomène de l'aberration de la lumière, dû à la combinaison de la vitesse de la lumière avec celle de la Terre ; il en déduit que la vitesse de la lumière vaut 10 188 fois celle de la Terre. Mais la vitesse de la Terre était mal connue, puisqu'elle dépend du rayon de son orbite.

La première mesure, indépendante d'une autre mesure, est faite par Hippolyte Fizeau, en 1849. En opérant entre Suresnes et Montmartre avec un dispositif à roue dentée, il trouve 315 000 $km \cdot s^{-1}$ (donc majorée avec une erreur de seulement 5%). Un résultat déjà impressionnant pour l'époque puisque l'expérience s'est contentée de moyens matériels d'une taille très restreinte eu égard à la vitesse calculée obtenue. Un nouveau progrès est fait par Léon Foucault avec un dispositif à miroir tournant, qui lui permet d'opérer sans sortir du laboratoire. En 1850, il montre que la lumière se déplace moins vite dans l'eau, en accord avec la théorie des ondulations. En 1862, il trouve la valeur de 298 000 $km \cdot s^{-1}$.

De nos jours, la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle, fixée à 299 792 458 $m \cdot s^{-1}$. Cette constante permet ensuite de définir le mètre.